

Mit dem Versuchsaufbau nach Millikan sollen die Quantisierung der elektrischen Ladung nachgewiesen und die Größe der Elementarladung bestimmt werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Grundsätzliche Idee des Experimentes

Bei dem von **Robert Andrews Millikan** 1910 entwickelten Experiment zur Bestimmung der Elementarladung wird das Verhalten geladener Öltröpfchen in einem vertikalen elektrischen Feld beobachtet.

Mit einem Zerstäuber werden die Öltröpfchen in einen Kondensator geblasen, dessen horizontale Platten den Abstand d haben. Die durch das Zerstäuben entstehenden Tröpfchen sind im Allgemeinen schwach elektrisch geladen. Im Originalversuch konnte die Ladung der Tröpfchen durch ionisierende Strahlung (*Röntgen- oder Gammastrahlung*) geändert werden.

Mit einer an den Kondensator angelegten Spannung U ist es somit möglich, ein Tröpfchen zum Schweben zu bringen. In diesem Fall herrscht ein Gleichgewicht zwischen der Gewichtskraft F_G , der Auftriebskraft F_A und der elektrischen Kraft F_{el} . Aus diesem Zusammenhang ergibt sich:

$$F_G - F_A - F_{el} = 0,$$

$$\text{wobei } F_G = m_{\text{Öl}} \cdot g, \quad F_A = m_L \cdot g, \quad F_{el} = q \cdot \frac{U}{d} \text{ ist.}$$

Daraus ergibt sich:

$$m_{\text{Öl}} \cdot g - m_L \cdot g - q \cdot \frac{U}{d} = 0 \quad (1)$$

$m_{\text{Öl}}$: Masse des Öltröpfchens

m_L : Masse der verdrängten Luft

Um aus Gleichung (1) die Ladung q bestimmen zu können, muss man die Masse des Öltröpfchens und der verdrängten Luft kennen. Bei einem kugelförmig angenommenen Tröpfchen genügt es, dessen Radius zu ermitteln. Dazu ist aber ein separates Teilexperiment nötig.

1.2 Bestimmung des Tröpfchenradius

Im feldfreien Kondensator ($U=0$) sinken die Tröpfchen nach unten. Die umgebende Luft bewirkt zusätzlich zur Gewichtskraft eine Auftriebskraft und eine zur Geschwindigkeit proportionale Stokesche Reibungskraft. Die Sinkgeschwindigkeit v_1 der Tröpfchen wächst in kurzer Zeit soweit an, dass ein Kräftegleichgewicht zwischen der Gewichtskraft des Tröpfchens, seinem Auftrieb in der umgebenden Luft und der Stokeschen Reibungskraft $F_s = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1$ besteht. Im stationären Zustand (*konstante Sinkgeschwindigkeit*) gilt:

$$m_{\text{Öl}} \cdot g - m_L \cdot g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1 = 0 \quad (2)$$

η : Viskosität von Luft

r : Tröpfchenradius

v_1 : Tröpfchengeschwindigkeit

$$(m_{\text{Öl}} - m_L) \cdot g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1 = 0$$

Dabei ist $m = V \cdot \rho$ und so schreibt man:

$$(V \cdot \rho_{\text{Öl}} - V \cdot \rho_L) \cdot g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1 = 0$$

$\rho_{\text{Öl}}, \rho_{\text{Luft}}$: Dichte des Öles bzw. der Luft

Setzt man nun für $\rho_{\text{Öl}} - \rho_L = \Delta\rho$ ein erhält man:

$$V \cdot \Delta\rho \cdot g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1 = 0$$

Durch Einsetzen des Tröpfchenvolumens $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ erhält man nun

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \Delta\rho \cdot g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1 = 0 \quad (3)$$

Ausgehend von Gl. (3) der stationären Sinkgeschwindigkeit v_1 kann also der Tröpfchenradius r bestimmt werden:

$$r = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{\eta \cdot v_1}{\Delta\rho \cdot g}} \quad (4)$$

1.3 Bestimmung der Ladung

Zur Bestimmung der Ladung können zwei Methoden angewandt werden: die Gleichgewichtsmethode, die in **Abschnitt 1.1** beschrieben ist, und eine dynamische Methode, bei der sich das Tröpfchen im elektrischen Feld nach oben bewegt.

Aus Gleichung (1) erhält man bei der **Gleichgewichtsmethode** nach Einsetzen des Tröpfchenvolumens

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \Delta\rho \cdot g - q \cdot \frac{U}{d} = 0. \quad (5)$$

Gl. (4) wird in Gl. (5) eingesetzt und nach q aufgelöst, so erhält man:

$$q = 18\pi \cdot \frac{d}{U} \cdot \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot v_1^3}{\Delta\rho \cdot 2g}} \quad (6)$$

Die Gleichgewichtsmethode hat den Nachteil, dass die Schwebespannung U aufgrund der merklichen Brownschen Bewegung des Tröpfchens nur schwer einzustellen ist.

Dieser Nachteil wird durch die dynamische Methode umgangen. Dabei wird die Spannung U so groß gewählt, dass das betrachtete Tröpfchen in dem Kondensator aufsteigt. Wie im feldfreien Fall stellt sich auch hier nach kurzer Zeit eine konstante Geschwindigkeit v_2 ein. Es gilt dann

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Delta\rho \cdot g - q \cdot \frac{U}{d} + 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_2 = 0 \quad (7)$$

Mit Gl. (4) in Gl. (7) eingesetzt und nach q aufgelöst, ergibt sich:

$$q = 18\pi \cdot \frac{d}{U} \cdot (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot v_1}{\Delta\rho \cdot 2g}} \quad (8)$$

1.4 Korrektur der Viskosität

Die Gleichung für die Stokessche Reibungskraft setzt voraus, dass sich die Kugel in einem homogenen Medium bewegt. Diese Voraussetzung ist aber bei dem vorliegenden Experiment nur schlecht erfüllt, denn die Radien der Tröpfchen ($0,1 \dots 1 \mu\text{m}$) liegen in der Größenordnung der freien Weglänge der Luftmoleküle bei Normaldruck. Diese Tatsache wird durch eine Korrektur der dynamischen Viskosität der Luft berücksichtigt (*Cunningham-Korrektur*):

$$\eta_{Korr} = \eta \left(1 + \frac{b}{r \cdot p_L} \right)^{-1} \quad (9)$$

p_L : Luftdruck

Der korrigierte Wert der Viskosität nimmt also mit kleiner werdendem Tröpfchenradius r ab. Die Konstante b wurde empirisch zu $b=6 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ bestimmt.

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Die Ladungen von Öltröpfchen sollen in diesem Versuch durch zwei unterschiedliche Verfahren bestimmt werden, zum einen in **Aufgabe 1** nach Gleichung (6) und zum anderen in **Aufgabe 2** nach Gleichung (8). Zerlegen Sie die Gleichungen so, dass Sie einen konstanten und variablen Teil (*experimentelle Größen*) erhalten. Der konstante Teil muss bei beiden Gleichungen gleich sein. Berechnen Sie diesen. (*Werte siehe Versuchsanleitung*).

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Millikan-Gerät mit Versorgungsspannungen, zwei elektronische Stoppuhren, Barometer

2.2.2 Versuchshinweise

Messen Sie an möglichst vielen Öltröpfchen die Ladung und bestimmen Sie anhand der Messergebnisse den Wert der Elementarladung e .

Unabhängig davon, ob die Messung der Ladung nach der Gleichgewichtsmethode oder nach der dynamischen Methode erfolgt, müssen Geschwindigkeiten für die Ermittlung von r bestimmt werden.

Dazu werden die Tröpfchen seitlich durch eine Lichtquelle beleuchtet und von vorn durch ein Mikroskop mit einem Okularmikrometer beobachtet. Durch einen Glasmaßstab, der anstelle der Tröpfchen durch das Mikroskop betrachtet wird, kann das Okularmikrometer kalibriert werden.

Bei der verwendeten Lichtquelle ist auf eine möglichst geringe Wärmestrahlung zu achten, um Turbulenzen der Luft im Kondensator soweit wie möglich zu vermeiden.

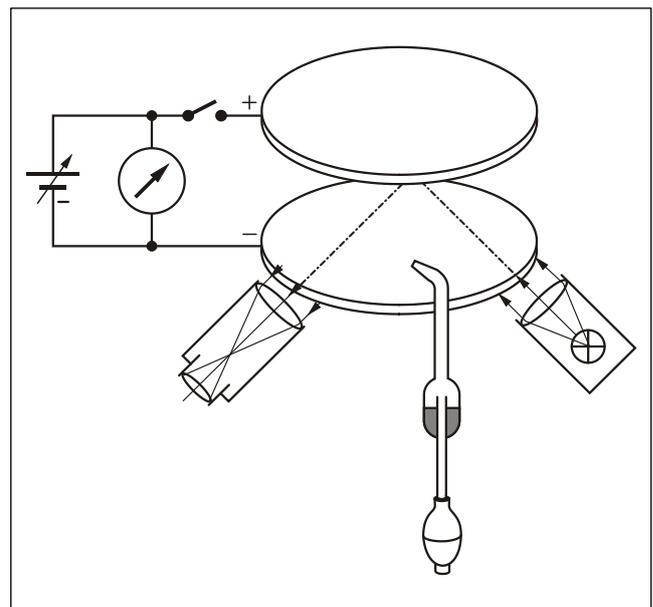


Bild 1: Prinzipieller Versuchsaufbau

Die Messung der Geschwindigkeit geschieht am einfachsten, indem man die Zeit t misst, die das Tröpfchen für eine feste Zahl an Mikrometer-Skalenteilen (Skt.) benötigt.

Achten Sie beim weiteren Experimentieren darauf, dass das Mikroskop ein umgekehrtes Bild erzeugt, weshalb alle Bewegungsrichtungen umgekehrt erscheinen. Im Folgenden werden die Bewegungen so beschrieben, wie man sie am Bildschirm beobachtet.

Für die Messung sind kleine Tröpfchen geeigneter als große. Bei großen Tröpfchen muss die notwendige Ladung entsprechend groß sein, damit das Tröpfchen im elektrischen Feld „sinkt“. Dadurch fällt auch der Nachweis der Quantisierung schwerer. Nach dem Zerstäuben des Öls sucht man sich deshalb zunächst ein Tröpfchen aus, das bei $U=0$ mit einer Geschwindigkeit von etwa $(0,5 \dots 1) \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ „steigt“.

Aufbau und Bedienung

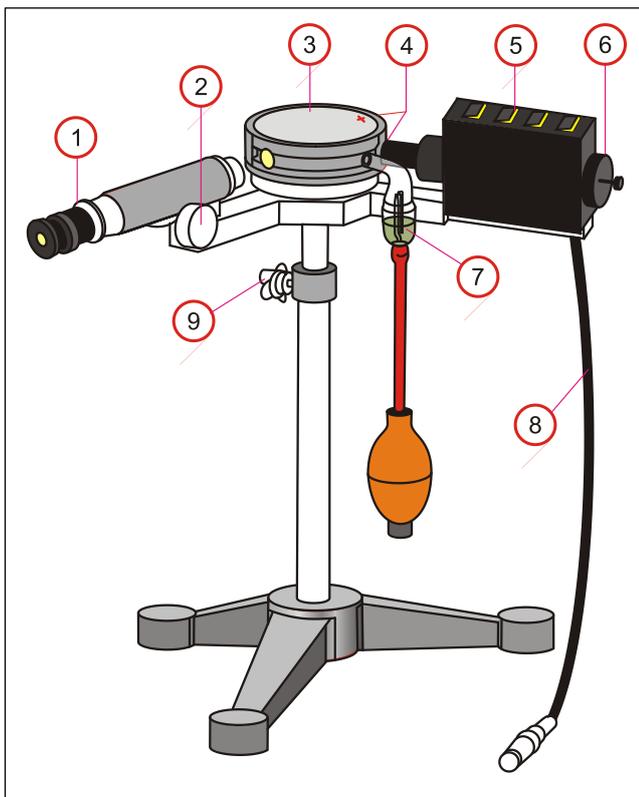


Bild 2: Aufbau des Millikan-Gerätes

- (1) Messmikroskop mit Okularmikrometer
- (2) Rändelschraube für Mikroskopeinstellung
- (3) Millikankammer (*Plattenkondensator*)
- (4) Gleichspannungsanschluss für Kondensator
- (5) Lampenbeleuchtung
- (6) Lampenjustierung
- (7) Ölzerstäuber
- (8) Anschluss Lampenspannung
- (9) Höhenverstellung

- Überprüfen Sie die Verbindung der Geräte entsprechend **Bild 3** und schalten Sie diese ein.
- Stellen Sie den Messbereichsschalter an den Messgeräten auf Zeitmessung (**s**) ein und setzen Sie die Zeitanzeige auf *Null* zurück.
- Zerstäuben Sie das Öl durch **einmaliges kräftiges** Drücken des Gummiballs in die Millikan-Kammer. Ohne Anlegen einer Kondensatorspannung U schweben die Öltröpfchen auf dem Bildschirm nach oben, tatsächlich sinken Sie aber ohne ein elektrisches Feld nach unten.

- Machen Sie sich zunächst mit den Erscheinungsformen der Öltröpfchen vertraut (*helle Striche oder Kreuze*) und stellen Sie diese gegebenenfalls scharf ein.
- Messen Sie den Luftdruck mit Hilfe eines Barometers (*neben der Eingangstür*).

Aufgabe 1: Messmethode mit einem Zeitmesser

Bei diesem Versuch sind folgende Messgrößen zu ermitteln:

- die **Spannung U** , bei der ein geladenes Öltröpfchen im elektrischen Feld des Plattenkondensators in der Schwebelage gehalten wird und
- die **Zeit t** , die das gleiche Öltröpfchen benötigt, um nach dem Abschalten der Spannung längs eines Weges s zu sinken (*zur Berechnung der Sinkgeschwindigkeit v_1 im feldfreien Raum*).

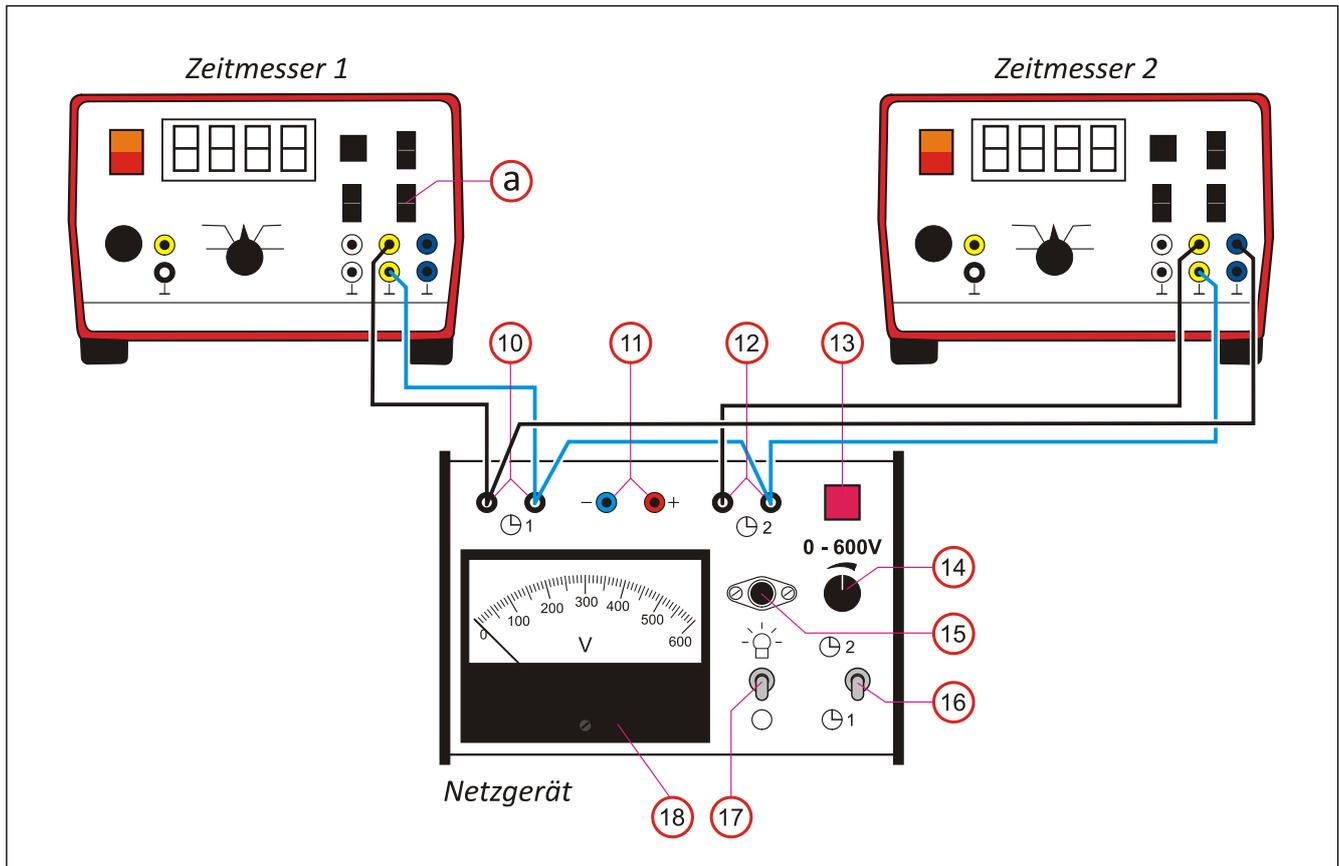


Bild 3: Schaltung der zugehörigen Versorgungs- und Zeitmessgeräte

Messverfahren

- Stellen Sie die **Schalter (17)** und **(16) nach oben**. Überprüfen Sie die Verbindung der Spannungsversorgung des Kondensators und die Messbereitschaft des **Zeitmessers 1**.
- Stellen Sie die Spannung U an dem **Drehknopf (14)** so ein, dass ein Öltröpfchen im unteren Drittel des Beobachtungsfeldes schwebt. Lesen Sie dann die Spannung U ab.
- Starten Sie den **Zeitmessers 1**, in dem Sie den **Schalter (16) (nach unten)** betätigen. Die Spannung U schaltet dabei gleichzeitig ab.
- Beobachten Sie auf dem Bildschirm ein aufsteigendes Öltröpfchen. Stoppen Sie den Zeitmesser durch Betätigen des **Schalters (a)**, wenn das Öltröpfchen einen Weg von z.B. 20 Skalenteilen (Skt.) zurückgelegt hat und fokussieren Sie gegebenenfalls nach.
- Für eine statistisch sichere Aussage wiederholen Sie die Messung für **mindestens 25 Öltröpfchen**.

Aufgabe 2: Messmethode mit zwei Zeitmessern

Bei diesem Versuch sind folgende Messgrößen zu ermitteln:

- die **Zeit t_2** , die ein Öltröpfchen benötigt, um längs des Weges s zu steigen, wenn am Plattenkondensator eine Spannung U anliegt (zur Bestimmung der Steiggeschwindigkeit v_2 im elektrischen Feld),
- die **Zeit t_1** , die das gleiche Öltröpfchen nach Abschalten der Spannung U benötigt, um längs eines Weges s wieder zu sinken (zur Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit v_1 im feldfreien Raum) und
- die **Kondensatorspannung U** .

Messverfahren

- Stellen Sie die **Schalter (17) und (16) nach oben**.
- Stellen Sie am **Drehknopf (14)** die Spannung U zwischen (**500 ... 600**) **V** so ein, dass auf dem Bildschirm Öltröpfchen als sinkende Tröpfchen zu beobachten sind. Notieren Sie die Spannung U .
- Betätigen Sie den **Schalter (17) (nach unten)**. Der Steuerstromkreis für die beiden Zeitmesser ist geöffnet. Überprüfen Sie nochmals die Verbindung der Spannungsversorgung des Kondensators sowie die Messbereitschaft der beiden Zeitmesser und setzen Sie diese auf **Null** zurück.
- Wählen Sie im oberen Drittel des Beobachtungsfeldes ein langsam sinkendes Öltröpfchen aus. Betätigen Sie den **Schalter (17) (nach oben)** genau dann, wenn das Öltröpfchen eine Messmarke (z.B. **40. Skalenteil**) passiert. Der **Zeitmesser 2** (Messung der **Steigzeit t_2 im elektrischen Feld**) startet gleichzeitig.
- Beobachten Sie auf dem Bildschirm das steigende Öltröpfchen und fokussieren Sie gegebenenfalls nach. Betätigen Sie den **Schalter (16) (nach unten)** genau zu dem Zeitpunkt, wenn das Tröpfchen die zweite Messmarke (z.B. **60. Skalenteil**) passiert hat. Gleichzeitig wird die Kondensatorspannung U abgeschaltet, der **Zeitmesser 2** gestoppt und der **Zeitmesser 1** (Messung der **Sinkzeit t_1 im elektrischen Feld**) gestartet.
- Beobachten Sie das nun steigende Tröpfchen auf dem Bildschirm und fokussieren Sie gegebenenfalls nach. Stoppen Sie den **Zeitmesser 1** durch Betätigen des Schalters (**a**) genau dann, wenn das Öltröpfchen die 1. Messmarke (z.B. **40. Skalenteil**) wieder passiert.
- Für eine statistisch sichere Aussage wiederholen Sie die Messung für **mindestens 25 Öltröpfchen**.

2.3 Versuchsauswertung

Durch Vergleich der im Okular des Mikroskops befindlichen Mikrometerskala (*Teilstrichabstand $a=100\ \mu\text{m}$*) mit der Millimeterteilung eines Glasstabes in der Kammer gibt der Hersteller eine Objektivvergrößerung von $K=1,875$ an. Der tatsächliche Weg s der Tröpfchen ergibt also:

$$s = \frac{\text{Skt.}}{K} \cdot a \qquad \text{Abweichung max. 1\%} \qquad (10)$$

Weitere ermittelte Größen, die zur Auswertung benötigt werden:

$\eta = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$	Viskosität des Öls
$d = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	Abstand der Platten
$\rho_{\text{öl}} = 875,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Dichte des Öls
$\rho_{\text{Luft}} = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Dichte der Luft

- Führen Sie die Auswertung tabellarisch für **beider Verfahren (Aufgabe 1 und 2)** mit je einer Beispielrechnung durch.
- Bestimmen Sie auf der Grundlage der Vorbetrachtungsaufgabe den konstanten Anteil k und berechnen Sie die zugehörige Ladung q nach den Gleichungen (6) oder (8).
- Ermitteln Sie die tatsächliche Weglänge s für 20 Skt. nach Gleichung (10) und bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeit v Öltröpfchens.

- Um die korrigierte Ladung q_{korr} zu bestimmen (*nur bei Aufgabe 1*), ist es wichtig den Tröpfchenradius r nach Gleichung (4) und die korrigierte Viskosität η_{korr} nach Gleichung (9) zu berechnen.
- In **Aufgabe 2** verwenden Sie zur Bestimmung der korrigierten Ladung q_{korr} den Mittelwert der korrigierten Viskosität η_{korr} von **Aufgabe 1**.
- Schätzen Sie die maximalen Abweichungen ab.
- Stellen Sie die korrigierten Ladungen in Form eines Histogramms (*Ergebnisse beider Aufgaben in ein Diagramm*) mit einer Intervallbreite von 10^{-20}C dar (*Beispiel Abschnitt 3.2*).

Wird die Quantelung der elektrischen Ladung sichtbar so gilt:

- Die Messergebnisse gruppieren sich um ganzzahlige Vielfache N der Elementarladung e . Um diesen Wert e zu erhalten, berechnen Sie zunächst für jede Gruppierung den Quotienten q/N und dann den Mittelwert aller Quotienten.
- Wird die Häufigkeit der Messergebnisse wegen einer zu geringen Anzahl von Messungen für die Auswertung nicht deutlich, markieren Sie in dem Histogramm den Tabellenwert der elektrischen Elementarladung und dessen Vielfache.
- Führen Sie zur Messunsicherheit beitragende Faktoren in jedem Fall auf und diskutieren Sie ihren Einfluss auf das Messergebnis.

3. Ergänzung

3.1 Vertiefende Fragen

Eine gängige Variante der dynamischen Methode besteht darin, das Feld nicht auszuschalten, sondern die Kondensatorspannung umzupolen. Was beobachtet man dann?

Zeigen Sie, dass sich die Tröpfchenladung dann aus

$$q = \frac{9}{2} \cdot \pi \cdot \frac{d}{U} \cdot (v_3 + v_2) \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_3 - v_2)}{\Delta \rho \cdot g}} \quad (11)$$

berechnen lässt.

- Erstellen Sie den Kraftansatz entsprechend Gleichung (7) für v_2 (*Tröpfchen steigt im Kondensator*) und für v_3 (*Tröpfchen fällt im Kondensator*).
- Verwenden Sie beide Gleichungen zur Ermittlung des Tröpfchenradius und der Ladung.

3.2 Ermittlung von Häufigkeitsverteilungen

Eine Art Vorstufe der statistischen Analyse von Messdaten stellt die Ermittlung von empirischen **Häufigkeitsverteilungen** dar. Die zufällige Messgröße X bezeichnet man in diesem Fall auch als Merkmal, die Messwerte x_1, x_2, \dots, x_n als Merkmalswerte und die Messwertreihe als Urliste. Treten einzelne Werte mehrfach auf, so wird man eine Häufigkeitstabelle aufstellen und daraus die absoluten oder die relativen Häufigkeiten sowie die relativen Häufigkeitssummen bestimmen.

Liegt eine ausreichende Anzahl unterschiedlich großer Messwerte vor, so ist eine Aufteilung der Messwerte in eine bestimmte Anzahl r von Klassen k oder Intervallen ($k = 1, \dots, r$) zweckmäßig. Die Klassenbreite Δx_k wird so festgelegt, dass die charakteristische Größenverteilung der Merkmalswerte gut

zu erkennen ist. Sie soll nicht zu klein, aber auch nicht zu groß gewählt werden, da sonst bei zu engen Intervallen die Schwankungen zu groß werden und bei zu weiten Intervallen das Typische der Verteilung verloren gehen kann.

Die auf eine Intervallgrenze fallenden Werte werden je zur Hälfte den angrenzenden Intervallen zugeordnet, wobei die Intervall- oder Klassenbreite in der Regel für alle Klassen gleich groß festgelegt wird. Der Wert x_k repräsentiert den Mittelwert bezüglich der Klasse k .

Die relative Häufigkeitssumme bestimmt man, indem die Summe aus den einzelnen relativen Häufigkeiten bis einschließlich zur jeweils k -ten Klasse gebildet wird.

Zur Veranschaulichung von beobachteten Häufigkeitsverteilungen eignen sich besonders **Histogramme (Bild 4)**. In einem Histogramm wird die Häufigkeitsdichte, d.h. die absolute oder die relative Häufigkeit, dividiert durch die Klassenbreite, graphisch dargestellt.

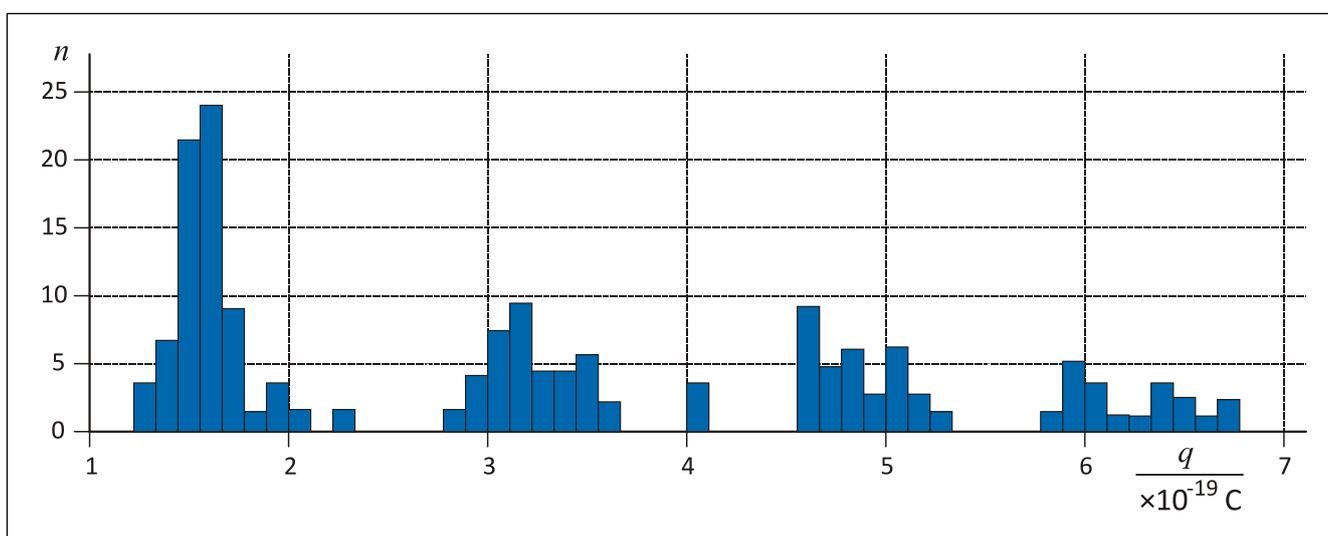


Bild 4: Beispiel eines Histogrammes mit Messwerten von 192 Öltröpfchen