Mit einem Zählrohr sollen die Null- und die Zählrate bei einem radioaktiven Präparat aufgenommen werden. Die gemessenen Zählstatistiken werden mit der Poisson- und der Normalverteilung verglichen.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Radioaktive Strahlung

Neben stabilen Atomkernen treten in der Natur auch Atomkerne auf, die ohne äußeren Einfluss unter Emission radioaktiver Strahlung spontan zerfallen. Die am häufigsten auftretenden Strahlungsarten sind ***α–, β– und γ–Strahlung***.

Bei der ***α–Strahlung*** emittiert der Atomkern X einen He-Kern (α*–Teilchen*) und wandelt sich damit in den Tochterkern Yum (A*: Massenzahl,* Z*: Kernladungszahl*):

$$ {}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}He \tag{1}$$

Da Mutter und Tochterkerne nur diskrete Energien annehmen können, haben auch die α*–Teilchen* nur diskrete kinetische Energien, die typisch zwischen 2 und $10\ \mathrm{MeV}$ liegen ($1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$).

β–Strahlung besteht aus schnellen Elektronen, die beim Zerfall eines Neutrons des Atomkerns entstehen. Bei jedem Zerfall entsteht neben einem Elektron und einem Proton noch ein Antineutrino:

$$ {}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + e^{-} + \bar{\nu} \tag{2}$$

Die frei werdende kinetische Energie kann sich auf das Elektron und auf das Antineutrino $\bar{\nu}$ verteilen. Demzufolge besitzt die β*–Strahlung* ein kontinuierliches Energiespektrum mit einer bestimmten Maximalenergie, die in der gleichen Größenordnung wie die Energie der α*–Strahlen* liegt.

Oft bleibt der Tochterkern nach einem α– oder β*–Zerfall* zunächst in einem angeregten Zustand zurück und gibt seine Energie mehr oder weniger verzögert als ***energiereiches Photon*** (*Gammaquant*) ab:

$$ {}_{Z+1}^{A}Y' \longrightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + h \cdot f \tag{3}$$

$h = 6{,}626\ 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	*Plancksches Wirkungsquantum*
f	*dem Photon zugeordnete Frequenz*

Wie bei der Gammastrahlung handelt es sich auch bei der Röntgenstrahlung um elektromagnetische Strahlung. Die Unterscheidung zwischen beiden Strahlungsarten beruht lediglich auf der unterschiedlichen Herkunft der beiden Strahlungsarten. Röntgenstrahlung entsteht in den inneren Schalen der Atomhülle, Gammastrahlung hingegen im Atomkern. Auch im elektromagnetischen Spektrum können sie nicht scharf gegeneinander abgegrenzt werden. Bei Röntgenstrahlung liegen die Photonenenergien etwa zwischen $1\ \mathrm{keV}$ und $0{,}5\ \mathrm{MeV}$. Gammastrahlung besitzt Photonenenergien von etwa $0{,}1\ \mathrm{MeV}$ bis $5\ \mathrm{MeV}$.

Sowohl Gamma- als auch Röntgenstrahlen können Materie ionisieren.

1.2 Nachweis ionisierender Strahlung

Als empfindliches Nachweisgerät wird das ***Geiger-Müller-Zählrohr*** verwendet. Mit ihm ist der Nachweis einzelner ionisierender Teilchen bzw. Strahlung möglich.
Es besteht aus einem Metallzylinder, in dem isoliert ein dünner Draht gespannt ist. Zwischen den Draht und das Gehäuse wird eine Spannung von einigen hundert bis tausend Volt gelegt, so dass der Draht positiv gegenüber dem Gehäuse ist. Das Zählrohr ist mit einem Gas (*Halogen*) von etwa $100\,\mathrm{mbar}$ Druck gefüllt. An einem Ende des Rohres befindet sich ein sehr dünnes Fenster, durch das die Strahlung eintreten kann.

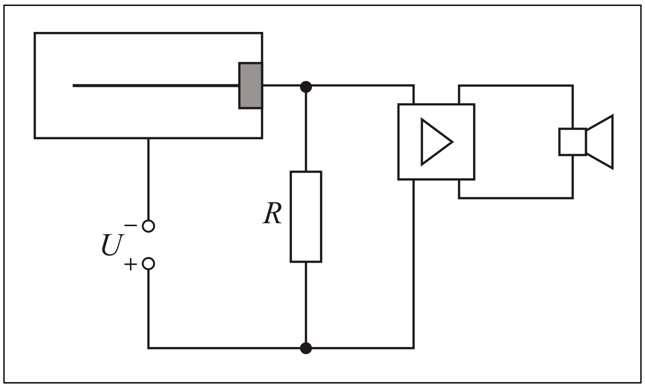


Bild 1: Schaltung Geiger-Müller-Zählrohr

Durch eindringende Strahlung werden wie bei der Ionisationskammer einige Gasatome ionisiert. Wegen der großen Feldstärke in Drahtnähe tritt jedoch Stoßionisation auf. Durch diese Verstärkung, die je nach Zählrohrspannung einige Zehnerpotenzen beträgt, entsteht ein Stromstoß durch den hochohmigen Widerstand R. Der Spannungsabfall an R kann über eine geeignete Elektronik registriert werden. Wegen der gleichzeitigen Verminderung der Zählrohrspannung reicht die Feldstärke in Drahtnähe für weitere Stoßionisation nicht mehr aus, und die gezündete Gasentladung verlöscht wieder.

Während der Entladung spricht das Zählrohr auf weitere ionisierende Teilchen nicht an. Diese ***Totzeit des Zählers*** kann verringert werden, indem man dem Füllgas eine geringe Menge Dampf mehratomiger Moleküle (*z.B. Alkohol*) zugibt.
Wegen der geringen Ionenproduktion im Gas ist für γ*–Strahlung* die Ansprechwahrscheinlichkeit eines Zählrohres sehr gering.

1.3 Zählstatistik seltener Ereignisse

Wenn man mehrmals unter unveränderten Versuchsbedingungen die Anzahl der Zerfallsereignisse während der Zeitdauer Δt bei einem langlebigen radioaktiven Präparat bestimmt, so wird man im allgemeinen unterschiedliche Anzahlen erhalten, die um einen Mittelwert streuen. Es soll nun die Wahrscheinlichkeit angegeben werden, mit der während eines Zeitintervalls Δt genau n Zählereignisse registriert werden.
Dazu zerlegen wir zunächst das Zeitintervall Δt in m gleich große Teilintervalle $\mathrm{d}t$. Die Zahl m soll so groß sein, dass die Wahrscheinlichkeit für zwei oder mehr Zerfallsereignisse während $\mathrm{d}t$ vernachlässigbar ist. Es genügt dann, die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Zerfall während des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ zu betrachten. Diese hängt von $\mathrm{d}t$ und damit von m ab und wird mit p_m bezeichnet.
Die Bestimmung der Anzahl der Zählereignisse während Δt kann unter der genannten Voraussetzung als ein m -stufiges Experiment aufgefasst werden, bei dem in jeder Stufe entweder ein Zerfall stattfindet oder nicht. Die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, bei diesem Experiment genau n Zählereignisse zu registrieren, ist durch die Binominalverteilung

$$p(n) = \binom{m}{n} p_m^n (1 - p_m)^{n-m} \tag{4}$$

gegeben.

In Gleichung (4) tritt noch die von der Feinheit der Unterteilung abhängige Wahrscheinlichkeit p_m auf. Die vorgenommene Unterteilung war jedoch vollkommen willkürlich. Wir betrachten deshalb den Erwartungswert $\bar{n}$ für die Anzahl der Zählereignisse im gesamten Zeitintervall Δt:

$$\bar{n} = m \cdot p_m \,. \tag{5}$$

Macht man nun die Unterteilung von Δt immer feiner, so wächst m gegen unendlich, während $\bar{n}$ unverändert bleibt. Nach dem Poissonschen Grenzwertsatz folgt dann, dass sich die Binominalverteilung (4) mit wachsendem m der Poissonverteilung

$$p_{\bar{n}}(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^{-\bar{n}} \tag{6}$$

nähert.

Wird also bei gleichbleibenden Zeitintervallen Δt mehrfach die Anzahl n der Zählereignisse bestimmt, so sind die gemessenen Werte poissonverteilt. Man beachte, dass die Poissonverteilung nicht symmetrisch zum Erwartungswert $\bar{n}$ ist und dass der wahrscheinlichste Wert im allgemeinen von $\bar{n}$ verschieden ist.

Die Standardabweichung σ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert als die positive Wurzel aus dem Erwartungswert der Abweichungsquadrate:

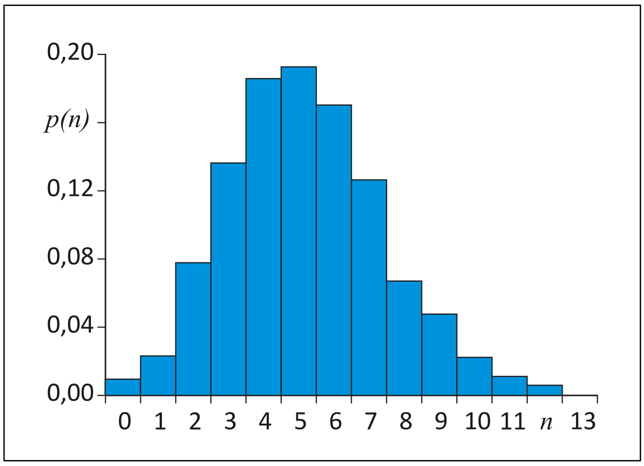


Bild 2: Poissonverteilung für $\bar{n}$=5,0

$$\sigma = \sqrt{\textstyle\sum_n p(n) \cdot (n - \bar{n})^2} \tag{7}$$

Für die Standardabweichung der Poissonverteilung ergibt sich:

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} \,. \tag{8}$$

1.4 Die Normalverteilung

Ist $\bar{n}$ größer als etwa 50, so kann man die Poissonverteilung (6) gut durch die Normal- oder Gaußverteilung approximieren:

$$F_{\bar{n}}(n) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(k-\bar{n})^2}{2\sigma^2}} \,. \tag{9}$$

Die Poissonverteilung besitzt nur einen Parameter, nämlich den Erwartungs- oder Mittelwert $\bar{n}$. Bei der Normalverteilung hingegen treten zwei unabhängige Parameter auf, der Mittelwert $\bar{n}$ und die Standardabweichung σ.

Bei der Bestimmung der Anzahl von Zählereignissen muss die Standardabweichung unverändert bleiben, wenn man von der Poissonverteilung zur Normalverteilung übergeht. Die Aussage von Gleichung

(8) gilt deshalb auch, wenn man die Normalverteilung zugrunde legt. Damit wird aus der zweiparametrischen Verteilung (9) die einparametrische Verteilung:

$$F_{\bar{n}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \bar{n}}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}} \quad . \tag{10}$$

Bei dem vorliegenden Experiment ist es selbstverständlich nur sinnvoll, in (9) bzw. (10) für n natürliche Zahlen einzusetzen. Die Normalverteilung beschreibt jedoch nicht nur die Zählstatistik bei radioaktiven Prozessen, sondern ist praktisch auf jede Zufallsvariable anwendbar, deren Streuung durch voneinander unabhängige Ereignisse verursacht ist. Im Allgemeinen sind (9) bzw. (10) also für den ganzen Bereich der reellen Zahlen definiert.

n	$p_{\bar{n}}(\nu)$	$F_{\bar{n}}(n)$
25	0,0000	0,0001
30	0,0007	0,0010
35	0,0054	0,0059
40	0,0215	0,0208
45	0,0458	0,0439
50	0,0563	0,0564
55	0,0422	0,0439
60	0,0201	0,0208
65	0,0063	0,0059
70	0,0014	0,0010
75	0,0002	0,0001

Tabelle 1: Vergleich zwischen Poisson- und Normalverteilung $\left(\bar{n} = 50, \sigma = \sqrt{\bar{n}}\right)$

Kann eine Zufallsvariable beliebige reelle Werte annehmen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein ganz bestimmter Wert x_0 auftritt, gleich null. Es ist dann nur sinnvoll, nach der Wahrscheinlichkeit $p(I)$ zu fragen, mit der ein Versuchsergebnis in einem Intervall $I = [a, b]$ liegt. Bei diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen müssen zur Beantwortung dieser Frage die Einzelwahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse in I aufsummiert werden. Bei der kontinuierlichen Normalverteilung erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p(I)$ durch Integration über I:

$$p(I) = \int_I \; F_{\bar{n}}\,(x)\mathrm{d}x \quad . \tag{11}$$

Die Gleichungen (9) und (10) geben also nicht direkt eine Wahrscheinlichkeit, sondern vielmehr die Wahrscheinlichkeit pro Einheitsintervall, also eine ***Wahrscheinlichkeitsdichte*** an. Genau wie man die Masse eines inhomogenen Körpers durch Integration der Dichtefunktion über das betrachtete Volumen erhält, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer Zufallsvariablen in einem bestimmten Intervall liegt, durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte über dieses Intervall.

1.5 Betrachtungen zur Messunsicherheit

Die numerische Berechnung des Integrals (11) liefert die Wahrscheinlichkeit p, dass eine Einzelmessung höchstens um Δn vom Mittelwert $\bar{n}$ abweicht. Man erhält die schon aus der Einführung bekannten Ergebnisse:

Δn	p
1σ	0,68
2σ	0,95
3σ	0,99

Tabelle 2: Beziehung zwischen Abweichung vom Mittelwert $\bar{n}$ und Wahrscheinlichkeit p

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Reihe von Zählergebnissen ein Einzelergebnis um mehr als σ vom Mittelwert abweicht, liegt demnach bei 32%. Führt man nur eine einzige Messung mit dem Ergebnis n_1 aus, so kann man umgekehrt schließen, dass ein Mittelwert $\bar{n}$, der sich in einer längeren Messreihe einstellen würde, mit 68% Wahrscheinlichkeit um nicht mehr als σ vom Einzelergebnis abweichen würde. Da $\bar{n}$ nicht bekannt ist, wählt man $\sqrt{n_1}$ als absolute Messabweichung bei der Bestimmung von $\bar{n}$. Das Messergebnis für den durch eine einzige Messung bestimmten Mittelwert ist dann

$$\bar{n} = n_1 \pm \sqrt{n_1} \ . \tag{12}$$

Die relative Abweichung bei (12) nimmt mit wachsender Anzahl der gemessenen Ereignisse ab:

$$\frac{\Delta\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \ . \tag{13}$$

Werden k Einzelmessungen mit den Ergebnissen n_i $(i{=}1, \dots, k)$ durchgeführt, kann der Mittelwert als Ergebnis angegeben werden:

$$\bar{n} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \ . \tag{14}$$

Die relative Abweichung dieses Mittelwertes wird nun nicht durch die Standardabweichung der Einzelmessung bestimmt, sondern ausschließlich von der Gesamtzahl der registrierten Zählereignisse:

$$\frac{\Delta\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i}} \neq \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \ . \tag{15}$$

Soll beispielsweise eine relative Abweichung von 1% erreicht werden, so müssen insgesamt 10.000 Ereignisse gezählt werden. Dabei spielt es keine Rolle, ob dies in mehreren Einzelexperimenten oder in einem einzigen Experiment geschieht.

Hinweis: Zum Verständnis dieser Betrachtungen ist es unumgänglich, ***Kapitel 4*** der *„Einführung in das physikalische Praktikum“* bearbeitet zu haben.

2.Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Machen Sie sich mit der Poisson- sowie mit der Normalverteilung vertraut. Worin bestehen die Unterschiede?

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Radioaktives Präparat: Radium (*Ra-226*), Aktivität $3{,}3\ \mathrm{kBq}$, Halbwertszeit $1620\ \mathrm{a}$, α*–*, β– und γ*–Strahler*, Zählrohr, Computer mit Messsystem und Auswertungssoftware

2.2.2 Versuchshinweise

Für das Experiment wird ein Computermesssystem verwendet, das auch die Betriebsspannung für das Zählrohr liefert.

Die Bedienungsanleitung für dieses Messsystem liegt am Praktikumsplatz.

Bei der Darstellung und den Berechnungen im PC werden folgende Symbole und Gleichungen verwendet:

$n = \sum_x H(x)$ $\qquad$ $N = \sum_x x \cdot H(x)$

$\bar{x} = \frac{N}{n}$ $\qquad$ $\mathrm{d}\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sigma^2 = \frac{\sum_x (x - \bar{x})^2 \cdot H(x)}{n-1}$ $\qquad$ $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\bar{x}}$

$H' = n \cdot \frac{\bar{x}}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Hinweis: *Vergleichen Sie diese Darstellung mit den Abhandlungen der Versuchsanleitung und ordnen Sie die Größen zu, bevor Sie mit der Auswertung beginnen!*

- Als Ergebnis liefert das Computermesssystem:
  - Eine Häufigkeitsverteilung $H(x)$ der Zählimpulse als Histogramm,
  - die statistischen Kenndaten entsprechend einer Poissonverteilung.

Aufgabe 1: Bestimmung der Nullrate

- Messen Sie mit einem Zählrohr ***100mal*** die Nullrate Z_0 in Zeitintervallen von $10\mathbf{s}$ und untersuchen Sie deren statistische Schwankung.

Aufgabe 2: Bestimmung der Zählrate

- Messen Sie mit einem Zählrohr die Zählrate eines langlebigen radioaktiven Präparats, von $\boldsymbol{n}$**=2000** Zählereignissen in einem Zeitintervall von **1s** und untersuchen Sie die statistische Schwankung der Zählrate.

2.3 Versuchsauswertung

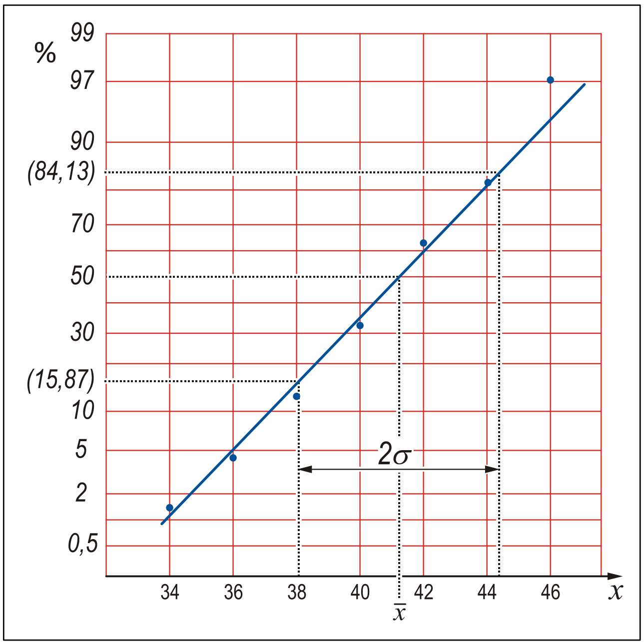
Aufgabe 1 und 2: Bestimmung der Null- und der Zählrate

- Nehmen Sie nach Abschluss der Messungen zu ***Aufgabe 1*** und ***2*** eine statistische Auswertung und einen Vergleich mit der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung vor.
- Beziehen Sie die mit dem Computer mögliche Auswertung der Messergebnisse in den Vergleich mit ein.
- Transformieren Sie die *y*-Achse beider Darstellungen zu einer Darstellung der ***relativen Häufigkeit*** $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{n})/\%$ (*Eintragung in die vom PC gelieferten Diagramme*).
- Berechnen Sie die theoretische Poissonverteilung mit den aus der ***Aufgabe 1*** erhaltenen Werten entsprechend der Gleichung (6) und tragen Sie diese in das Diagramm der relativen Häufigkeit mit ein.

- Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den vom Computermesssystem bestimmten theoretischen Daten.
- Geben Sie die Nullrate einschließlich der absoluten Abweichung an. Interpretieren Sie das Ergebnis.

- Berechnen Sie die theoretische Normalverteilung nach Gleichung (10). Verwenden Sie zur Vereinfachung eine Schrittweite von $\boldsymbol{x}$=5 (*Messwerte aus **Aufgabe 2***).
- Tragen Sie die berechneten Werte in die Darstellung der relativen Häufigkeit $h(n)/\%$ ein und vergleichen Sie diese mit den vom Computermesssystem bestimmten theoretischen Daten.
- Berechnen Sie die statistischen Kenndaten des Mittelwertes und der relativen Abweichung. Geben Sie die Zählrate einschließlich der absoluten Abweichung an.
- Stellen Sie auf einem Wahrscheinlichkeitspapier (*am Versuchsplatz*) die Funktion $\sum \boldsymbol{h(n)} = \boldsymbol{f(x)}$ graphisch dar, tragen sie die Regressionsgeraden ein und bestimmen Sie die einfache bzw. die doppelte Standardabweichung σ.

3. Ergänzung



Mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitspapier kann geprüft werden, ob sich die Verteilung des untersuchten Merkmals unter einer Normalverteilung anpasst und wie groß außerdem der Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ sind. Das Wahrscheinlichkeitsnetz ist ein Koordinatenpapier, dessen Ordinate so eingestellt wurde, dass die Summenprozentkurve der Normalverteilung eine Gerade wird (***Bild 3***)

Bild 3: Summenprozentkurve einer Häufigkeitsverteilung

Hinweis zur Durchführung und Auswertung

Das Computermesssystem CassyLab gibt Diagramme, Werte und Kennwerte aus.

Im Einzelnen sind hier zu nennen:

- ***Wert*** $\boldsymbol{x}$ (*x-Achse*): In dem gewählten Zeitintervall gibt es genau x – Ereignisse; x=0 bedeutet also, dass in dieser Zeitspanne nichts passiert; x=10 heißt, dass zehn Mal ein Ereignis stattgefunden hat.
- ***Wert*** $\boldsymbol{H(x)}$: Wie oft hat in der Zeitspanne es x – Ereignisse gegeben (*Häufigkeit*)?

Daraus ergibt sich die ebenfalls ausgegebene Tabelle $\boldsymbol{H(x)} = \boldsymbol{f(x)}$.

Summiert man alle $H(x)$ auf, lässt sich die relative Häufigkeit $H'(x)$ ermitteln und zwar zu

$$H'(x) = \frac{H(x)}{\sum H(x)} \cdot 100\% \,.$$

Im ersten Teil des Versuches führt die Darstellung von $\boldsymbol{H(x) = f(x)}$ zur Poisson-Verteilung, im zweiten Teil zur Gauß'schen Glockenkurve.
Summiert man zeilenweise die Werte von $H'(x)$ auf, so ergibt sich die so genannte Summenhäufigkeit oder auch Wahrscheinlichkeit nach Gleichung (11). Diese gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit es in dem Zeitintervall mindestens x Ereignisse gegeben hat. Die graphische Auftragung von p über x liefert also eine monoton steigende Funktion mit dem Höchstwert 1 (*bzw.* 100%), in linearer Auftragung eine rotationssymmetrische S-Kurve mit dem Wendepunkt bei $0{,}5$ (*bzw.* 50%).
Trägt man diesen Punktionsverlauf im Wahrscheinlichkeitspapier (***Bild 3***) auf, ergibt sich eine Gerade, aus deren Verlauf sich der Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ ermitteln lassen.