

Die Welleneigenschaften von Elektronen sollen durch die quantitative Untersuchung der Beugung eines Elektronenstrahls an einem Kristall nachgewiesen werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Die deBroglie-Wellenlänge

Schickt man schnelle Elektronen auf einen Kristall, so kann man hinter dem Kristall, ganz ähnlich wie bei der Beugung von Licht an einem optischen Gitter, scharf ausgeprägte Intensitätsmaxima feststellen, deren Lage vom Impuls der einfallenden Teilchen abhängt (*Experimente von Clinton Davisson und Lester Germer, 1923*). Diese Beobachtung kann nur als Interferenzerscheinung gedeutet werden. Sie verlangt zwingend die Beschreibung des Elektrons als Welle und steht somit in scheinbarem Widerspruch zu einer großen Zahl von Experimenten, die durch ein Teilchenmodell für Elektronen erklärt werden konnten.

Elektronen bilden hierbei keine Ausnahme: auch Licht zeigt einerseits an beugenden Öffnungen Wellennatur und andererseits, z.B. beim Fotoeffekt, Teilcheneigenschaften. Gleiches gilt für Mikroobjekte jeder Art: je nach Messmethode zeigen sie entweder Wellen- oder Teilcheneigenschaften.

Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruchs ist relativ einfach, wenn man einsieht, dass die aus der Makrophysik vertrauten Vorstellungen über Wellen oder Teilchen nicht uneingeschränkt auf Mikroobjekte übertragen werden dürfen. Weder Elektronen noch Photonen oder andere Mikroobjekte können durch die klassischen Modelle „Welle“ oder „Teilchen“ vollständig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Sie entziehen sich damit jeder vollständigen anschaulichen Beschreibung.

Das mathematische Modell für Mikroobjekte beschreibt diese durch eine komplexe, im allgemeinen orts- und zeitabhängige Größe $\psi(\vec{r}, t)$, die als „Wellenfunktion“ oder besser als „Materiewellenfeld“ bezeichnet wird. Die Wahrscheinlichkeit $w(\vec{r})$, das Objekt in einem Volumenelement dV um den Ort \vec{r} zu lokalisieren, ist

$$w(\vec{r}) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \cdot dV \quad (1)$$

Die Wellenlänge, die das Materiewellenfeld eines Mikroobjektes besitzt, wurde von deBroglie in Analogie zum Photon angegeben. Die Energie eines Photons der Frequenz f bzw. Wellenlänge λ ist

$$E_{\text{Phot}} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad (2)$$

h : Plancksches Wirkungsquantum
 c : Lichtgeschwindigkeit

Betrachtet man das Photon als Teilchen und setzt die Masse-Energie-Beziehung nach Einstein

$$E_{\text{Phot}} = m_{\text{Phot}} \cdot c^2 \quad (3)$$

ein, so erhält man durch Auflösen nach λ

$$\lambda = \frac{h}{m_{\text{Phot}} \cdot c} = \frac{h}{p_{\text{Phot}}} \quad (4)$$

p_{Phot} : Photonenimpuls

DeBroglie übertrug dieses Ergebnis für Photonen auf Materie und wies einem Teilchen der Masse m , das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5)$$

zu, wobei $p = m \cdot v$ der Impuls des Teilchens ist.

Die oben genannten Experimente von Davisson und Germer bestätigten auch quantitativ die Beziehung (5). Im vorliegenden Experiment wird die Geschwindigkeit und damit die Wellenlänge der Elektronen durch die Beschleunigungsspannung U bestimmt. Die kinetische Energie ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_e \cdot v^2 = e \cdot U \quad (6)$$

und der Impuls

$$p = m_e \cdot v = \sqrt{2m_e \cdot e \cdot U} \quad (7)$$

Nach (5) gilt für die deBroglie-Wellenlänge der Elektronen

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e \cdot e \cdot U}} \quad (8)$$

1.2 Die Bragg-Bedingung

Bei einer Beschleunigungsspannung $U=150 \text{ V}$ ist die Wellenlänge der Elektronen $\lambda \approx 10^{-10} \text{ m}$, d.h. rund 5000mal kleiner als die Wellenlänge von sichtbarem Licht. Damit Beugungserscheinungen auftreten, muss die beugende Öffnung etwa die Größenordnung der Wellenlänge haben. Optische Gitter sind deshalb für Beugungsexperimente mit Elektronen ungeeignet. Man verwendet stattdessen Kristalle als beugende Objekte.

Ein Kristall setzt sich zusammen aus Atomen, die räumlich periodisch als Gitter angeordnet sind. Der

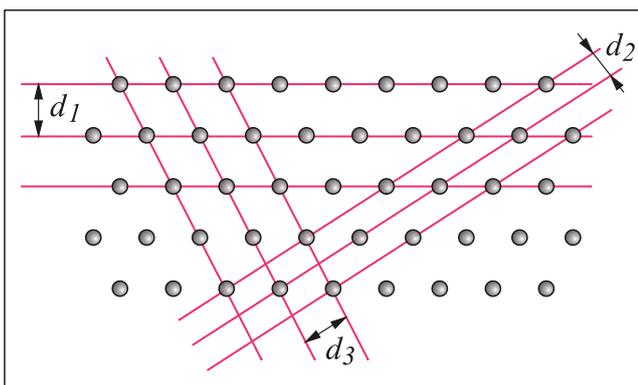


Bild 1: Netzebenen eines Kristalls

Abstand zwischen den Gitterpunkten liegt in der Größenordnung 10^{-10} m . Durch die Gitterpunkte lassen sich in verschiedene Richtungen untereinander parallele Ebenenscharen legen. Diese werden als **Netzebenen** des Kristalls bezeichnet (**Bild 1**). Trifft eine Welle auf einen Kristall, so wirkt jeder Gitterpunkt nach dem Huygensschen Prinzip als Erregungszentrum einer neuen Elementarwelle. Durch Konstruktion der Elementarwellen zeigt man, dass jede einzelne Netzebene als teildurchlässiger „Spiegel“ betrachtet werden kann. Für die Richtungen der ein- und auslaufenden Welle gilt

das aus der Optik bekannte Reflexionsgesetz. Bei der Betrachtung der insgesamt in eine bestimmte Richtung reflektierten Intensität muss nun die Interferenz der an verschiedenen „tiefen“ Ebenen reflektierten Teilwellen berücksichtigt werden.

Sie interferieren konstruktiv, falls der Gangunterschied zweier benachbarter Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist (**Bild 2**):

$$\overline{CB} + \overline{BD} = n \cdot \lambda \quad (9)$$

und damit

$$2d \cdot \sin \vartheta = n \cdot \lambda \quad (10)$$

Nur für Winkel, für die die Bragg-Bedingung (10) erfüllt ist, tritt Reflexion auf. Diese Winkel heißen **Glanzwinkel**.

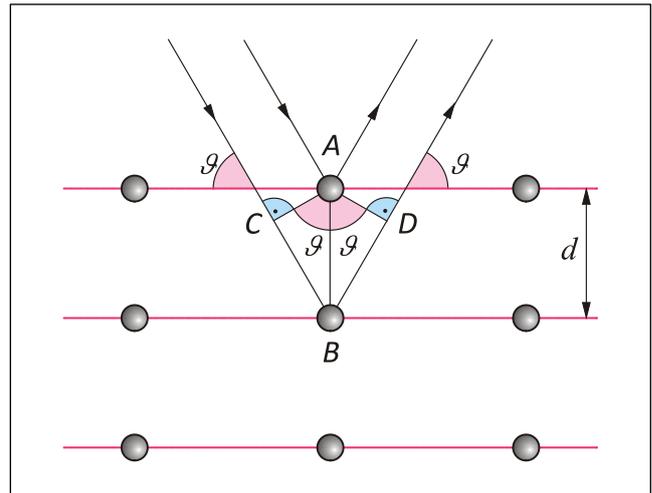


Bild 2: Bragg-Bedingung

1.3 Das Debye-Scherrer-Verfahren

Verwendet man einen Einkristall als Beugungsobjekt für eine monochromatische Welle bzw. für monoenergetische Elektronen, so erhält man bei einer festen Einfallsrichtung nur dann Reflexion, wenn zufällig eine Netzebenenchar in einem Winkel getroffen wird, der die Bragg-Bedingung erfüllt.

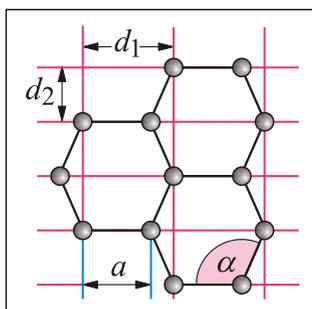


Bild 3: Netzebenen- bzw. Atomabstände bei Graphit

Das Debye-Scherrer-Verfahren verwendet deshalb polykristallines Material, d.h. sehr viele kleine Kristallite, die unregelmäßig angeordnet sind. Dadurch gibt es bei vorgegebener Einfallsrichtung und Wellenlänge immer einige Kristallite, bei denen die Bragg-Bedingung erfüllt ist. Die von diesen Kristalliten ausgehenden Reflexionen liegen auf Kegelmänteln, deren gemeinsame Achse durch die Einfallsrichtung gegeben ist. Auf einem Schirm, der senkrecht auf dieser Achse steht, treten also konzentrische Kreise auf.

Die Netzebenen, die für die Elektronenbeugung im **Graphit** eine wesentliche Rolle spielen, lassen sich durch den Abstand zwischen zweier benachbarter Graphitatomme a und dem Innenwinkel α wie folgt berechnen:

$$d_1 = a + a \cdot \cos(\frac{1}{2}\alpha) \quad d_1: \text{innerer Ring}$$

$$d_2 = a \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) \quad d_2: \text{äußerer Ring}$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Welche Wellenlänge λ besitzt ein Elektronenstrahl in einer Elektronenbeugungsröhre, wenn er mit einer Anodenspannung von $U_A=4,2 \text{ kV}$ angeregt wird? Dieser Elektronenstrahl wird an dem Graphitgitter abgelenkt. Welche Beugungswinkel 2ϑ entstehen in x -Richtung (d_1) bzw. in y -Richtung (d_2) (Siehe **Bild 3**)? (Abstand der Graphitatomme $a=142 \text{ pm}$, Innenwinkel $\alpha=120^\circ$)

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Elektronenbeugungsröhre mit Ständer, Hochspannungsversorgungsgerät mit Spannungsanzeige, 2 Vielfachmessgeräte, Stromversorgungsgerät 6V AC, Schiebewiderstand 11Ω , Messschieber

2.2.2 Versuchshinweise

Messen Sie für mehrere Beschleunigungsspannungen die Durchmesser der Beugungsringe. Ermitteln Sie daraus die Wellenlänge der Elektronen in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung und verifizieren Sie die deBroglie-Beziehung nach Gleichung (5) bzw. (8).

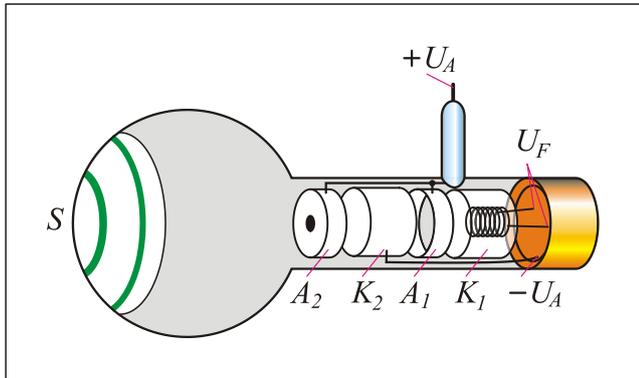


Bild 4: Prinzipaufbau einer Elektronenbeugungsröhre

Die Elektronenbeugungsröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben mit einem Elektroden-system aus vier hintereinander angeordneten Metallzylindern (**Bild 4**).

K_1 ist die indirekt beheizte Katode, K_2 , A_1 und A_2 bilden eine elektrostatisch fokussierende Linse. An der Anode A_2 ist auf einem feinen Trägernetz eine dünne polykristalline Graphitfolie angebracht. Die durch die Folie hindurchtretenden Elektronen gelangen auf die im Inneren der Glasröhre aufgebrachte Fluoreszenzschicht S , geben dort ihre Energie ab und bewirken grüne Leuchterscheinungen.

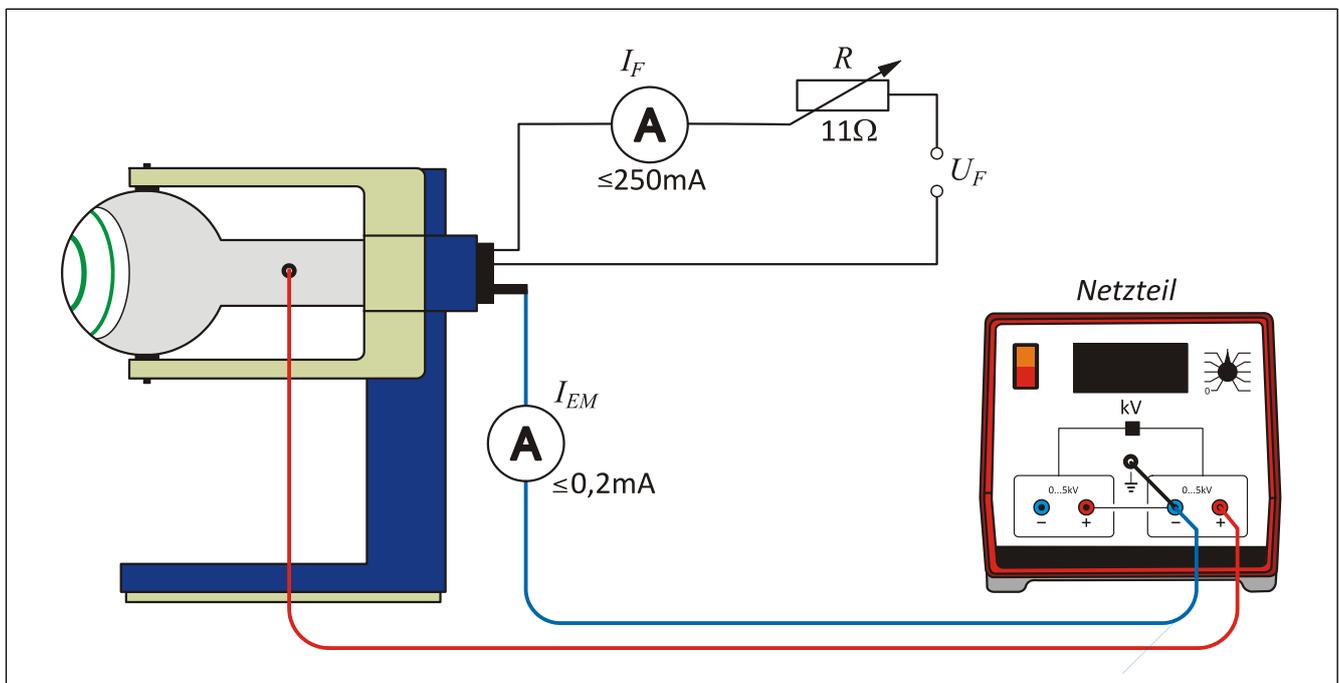


Bild 5: Versuchsaufbau

- Überprüfen Sie den Versuchsaufbau nach **Bild 5**. Dabei müssen die Stromversorgungsgeräte so angeordnet sein, dass deren Transformatoren die Elektronenstrahlen nicht magnetisch beeinflussen können.

Hinweis:

Verständigen Sie das Laborpersonal vor Inbetriebnahme!

- Stellen Sie den Vorwiderstand auf $R=11\ \Omega$ (entspricht Gesamtwiderstand) ein und schalten Sie die Heizspannung ein (Netzstecker einstecken).

- Warten Sie die Einstellung des Heizstromes ab und stellen Sie danach mit dem Vorwiderstand den Heizstrom auf $I_F=0,25\text{ A}$ ein. **Der Heizstrom darf während des Versuches diesen Wert nicht überschreiten!**
- Schalten Sie die Hochspannungsversorgung ein und regeln Sie **langsam** U_A auf $4,5\text{ kV}$ ein. Beachten Sie dabei, dass der Emissionsstrom $I_{EM}=0,2\text{ mA}$ nicht überschritten wird.

Hinweis:

Überwachen Sie den Emissionsstrom ständig und schalten Sie bei Überschreitung des genannten Wertes sofort die Hochspannung ab!

- Verdunkeln Sie den Raum bzw. sorgen Sie für eine Abdunkelung der Elektronenbeugungsröhre.
- Lesen Sie die Hochspannung U_A ab. Messen Sie mit dem Messschieber die Durchmesser der Beugungsringe D_1 (kleiner Ring) und D_2 (großer Ring) je **6-mal** pro Ring (**3-mal** $D_{i(\text{außen})}$, **3-mal** $D_{i(\text{innen})}$).
- Verringern Sie danach die Hochspannung U_A um jeweils $0,5\text{ kV}$ bis auf $U_A=3,0\text{ kV}$ ($4,5\text{ kV}$, $4,0\text{ kV}$, $3,5\text{ kV}$, $3,0\text{ kV}$) und messen Sie die sich dazu ergebenden Beugungsringe aus.

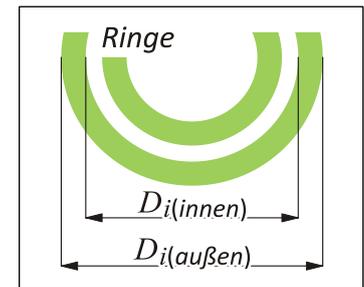


Bild 6: Bestimmung von D

Sind im Beugungsbild nicht mindestens zwei Beugungsringe einwandfrei zu sehen, so kann das daran liegen, dass die Graphitfolie nicht ohne Risse auf dem Trägernetz liegt und der Elektronenstrahl gerade auf einen solchen Riss trifft. Es kann dann mit Hilfe eines Justiermagneten, der um den Röhrenhals gelegt wird, die Richtung des Elektronenstrahls geringfügig beeinflusst werden, so dass er auf eine vollständig mit Graphit bedeckte Stelle trifft.

2.3 Versuchsauswertung

Entnehmen Sie aus **Bild 7** die Beziehung

$$\tan 2\vartheta = \frac{r}{l} \quad (11)$$

Nähern Sie $\tan 2\vartheta \approx \sin 2\vartheta \approx 2 \cdot \sin \vartheta$ für kleine Winkel, so ergibt sich

$$2 \cdot \sin \vartheta = \frac{r}{l} \quad (12)$$

Setzen Sie noch die Gleichung (10) in (12) ein, so erhalten Sie für die erste Beugungsordnung ($n=1$)

$$\lambda = \frac{d \cdot r}{l} \quad (13)$$

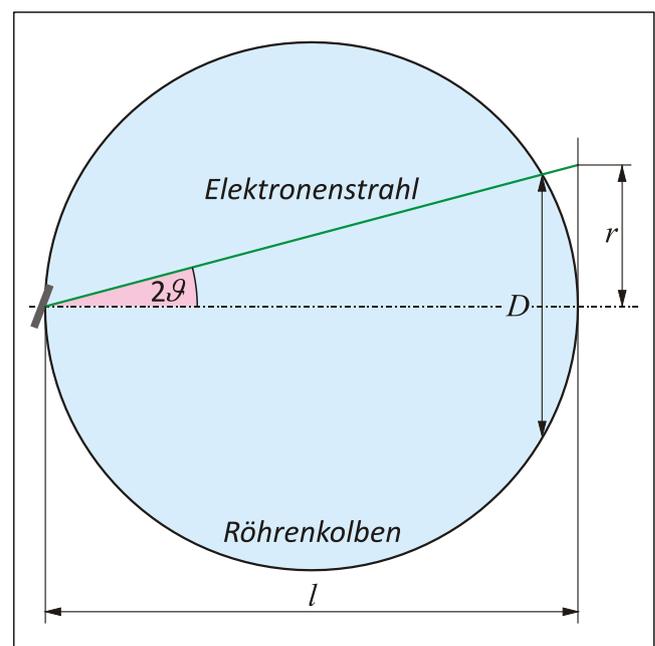


Bild 7: Graphische Bestimmung des Ablenkwinkels

Aufgabe a): Bestimmung der Ringdurchmesser D des großen und des kleinen Ringes

- Bestimmen Sie die Mittelwerte und die Messabweichungen ($u(D) = u_S(D) + u_Z(D)$) vom Ringdurchmesser D für jeden Ring und bei jeder Spannung.

Aufgabe b): Ermittlung der Radien r

- Fertigen Sie eine Skizze auf Millimeterpapier (**Maßstab 2:1**) entsprechend **Bild 7** an. Tragen Sie alle zuvor bestimmten Mittelwerte für D bzw. R an und ermitteln Sie graphisch alle Radien r .
- Berechnen Sie r (für beide Ringe bei jeder eingestellten Spannung) aus dem gegebenen Kolbendurchmesser l (Wert am Versuchsplatz) und den Ringdurchmessern D .
- Führen Sie einen Vergleich der graphisch ermittelten und den berechneten Werten von r durch.

Aufgabe c): Berechnung der Wellenlängen λ

- Berechnen Sie die jeweiligen Wellenlängen λ nach Gleichung (13).
- Die dominierende Abweichung der Messung tritt bei der Ermittlung der Ringdurchmesser auf. Somit haben auch die Wellenlängen λ_1 (für Ring 1) und die Wellenlängen λ_2 (für Ring 2) für die jeweiligen Hochspannungen U_A unterschiedliche Abweichungen. Verwenden Sie zur Berechnung der Wellenlänge λ (pro Hochspannungsebene) das **gewichtete Mittel** aus den Wellenlängen λ_1 und λ_2 (**Abschnitt 4.4** „Einführung in das Physikalische Praktikum“).
- Führen Sie einen Nachweis, dass beide Ringe von Elektronen ein und derselben Wellenlänge verursacht werden.
- Berechnen Sie zum Vergleich die theoretischen Wellenlängen nach der deBroglie-Gleichung (8) bei den jeweiligen Hochspannungen U_A .
- Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Konstanten: $e=1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $m_e=9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $h=6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

3. Ergänzung

3.1 Vertiefende Fragen

- Welcher Einfluss auf das Messergebnis ergibt sich, wenn man den Radius r der Beugungsringe direkt am Glaskolben und nicht wie in **Bild 7** angegeben für die Berechnung verwendet?
- Berechnen Sie die Radien der Beugungsringe höherer Ordnung (nach Gleichungen (10) und (12)).

3.2 Ergänzende Bemerkungen

Statt der Wellenlänge λ wird oft der Wellenvektor \vec{k} einer Welle angegeben. Sein Betrag ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (14)$$

seine Richtung ist festgelegt durch die Ausbreitungsrichtung der Welle.

Mit der Abkürzung

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (15)$$

und unter Verwendung der Kreisfrequenz ω der Welle schreiben sich die Gleichungen (2) und (5) in der Form

$$W = \hbar \cdot \omega \quad \vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$$

Den im Teilchenmodell relevanten Größen Energie und Impuls, entsprechen im Wellenmodell die Kreisfrequenz bzw. der Wellenvektor, der Skalierungsfaktor ist jeweils \hbar .