

# Herzlich Willkommen





# Einführung

## in das Physikalische Praktikum





# Inhalt

## Teil 1

- **Vorstellung des Praktikums**
- Allgemeine Hinweise
- Protokollführung
- Ausgewählte Messverfahren

## Teil 2

- Messunsicherheiten
- Auswertung von Messdaten
- Fehlerfortpflanzung
- Ergebnisdarstellung

# Versuche des Physikalischen Praktikums

1. Semester

26 Mechanik

12 Wärmelehre

2. Semester

14 Elektrik

10 Optik

12 Atom- und Kernphysik

3 Festkörperphysik

Versuchsauswahl

6 Versuche pro Semester





# Inhalt

## Teil 1

- Vorstellung des Praktikums
- **Allgemeine Hinweise**
- Protokollführung
- Ausgewählte Messverfahren

## Teil 2

- Messunsicherheiten
- Auswertung von Messdaten
- Fehlerfortpflanzung
- Ergebnisdarstellung

# Allgemeine Hinweise

## Ort

- Gebäude 4, Raum **4.244**
- Garderobenschränke im Keller **4.015** und **4.016**  
(**0,50 € Pfand**)

## Zeit

- Terminplan im Schaukasten neben dem Praktikumsraum

## Kontakte

Herr Berger  85 - **423**  
E-Mail: [Ingo.Berger@b-tu.de](mailto:Ingo.Berger@b-tu.de)

Herr Sykora  85 - **415**  
E-Mail: [Shadi.Sykora@b-tu.de](mailto:Shadi.Sykora@b-tu.de)

Herr Dr. Wolf  85 - **518**  
E-Mail: [Bodo.Wolf@b-tu.de](mailto:Bodo.Wolf@b-tu.de)

## Homepage

[https://www.  
b-tu.de/ag-experimentalphysik/lehre/physikalisches-praktikum](https://www.b-tu.de/ag-experimentalphysik/lehre/physikalisches-praktikum)

# Allgemeine Hinweise

## Allgemeines

- Einhaltung von Arbeits-, Gesundheits- und Brandschutz
- **Verbot** von Essen und Trinken im Laborbereich
- Arbeitsgruppen zu je **2 Praktikumsteilnehmer**
- ein Protokoll je Arbeitsgruppe pro Versuch
- Versuchsabschluss bei Anerkennung des Protokolls
- Protokolle im Physiklabor gesammelt  
Aushändigung der Protokolle und Testatkarten nach  
erfolgreicher Beendigung des Praktikums

# Allgemeine Hinweise

## Arbeitsschutz

- Sie sind im Praktikum unfallversichert. Zur Anfertigung eines Unfallprotokolls ist der Unfall dem Betreuer zu melden.
- Elektrische Schaltungen **stromlos** aufbauen.  
Prüfung durch den Praktikumsbetreuer.
- Berührung blanker, unter Spannung stehender Teile vermeiden (*gefährlich:  $U \geq 42 \text{ V AC}$ ;  $U \geq 60 \text{ V DC}$* ).
- Im Notfall Netzverbindung unterbrechen;  
rote **NOT-AUS-Taster** betätigen.
- Handhabung von Lasern bzw. schwach radioaktiven Quellen sowie vom Röntgengerät nur nach gesonderter Einweisung
- Bei Schäden (*Geräte, Glas, Quecksilber, Gasgeruch, Brandgefahr*) ist der Betreuer zu informieren.
- Bei grob fahrlässigem Verhalten kann der Praktikant regresspflichtig gemacht werden.

# Allgemeine Hinweise

## Gründe

*für eine **zeitnahe** Versuchswiederholung*

- Krankheit
- Mehr als **15 min** Verspätung
- Überschreitung der Versuchsdauer um **15 min**
- Keine Versuchsvorbereitung
- Versuchsabbruch durch technischen Defekt
- Überschreitung des Abgabetermins
- nach missglücktem Korrekturversuchen des Protokolls

## Gründe

*für eine Versuchswiederholung  
nach dem **regulärem Praktikum***

- unentschuldigtes Fehlen
- Betrugsversuch



# Allgemeine Hinweise

*Alle geforderten Versuche müssen bis **zur Prüfung abgeschlossen** sein.*

*Ist dies nicht der Fall,  
können in den entsprechenden Folgesemestern  
**Ersatzversuche nach Absprache** durchgeführt werden.*

*Sollte das nicht beendete Praktikum **länger als ein Jahr** her sein,  
muss das **komplette Praktikum wiederholt** werden.*

*Das bedeutet, die bereits zuvor durchgeführten  
und akzeptierten Versuche sind ungültig.*

# Allgemeine Hinweise

## Literatur

- *Einführung in das Physikalischen Praktikum;*  
Philipp, Berger, Wolf, 7.Auflage 2014

*Die Durcharbeitung des Heftchens gilt  
als **Versuchsvorbereitung** und **Arbeitsschutzbelehrung** !*

- *Physikalisches Praktikum;*  
D. Geschke, Teubner-Verlag, 12. Auflage 20013

---

- *Praktikum der Physik;*  
W. Walcher, Teubner Verlag, 9. Auflage 2006

---

- *Das Neue Physikalische Grundpraktikum;*  
Eichler/ Kronfeldt / Sahm, Springer-Verlag, 2. Auflage 2005

---

- *Physik;*  
Halliday / Resnick / Walker, WILEY-VCH, 2. Auflage 2009  
(auch als *Bachelor*-Ausgabe 2007 erhältlich)

---

- *Physik - Für Wissenschaftler und Ingenieure;*  
Paul A. Tipler, Spektrum Akademischer Verlag,  
6.Auflage 2009



# Inhalt

## Teil 1

- Vorstellung des Praktikums
- Allgemeine Hinweise
- **Protokollführung**
- Ausgewählte Messverfahren

## Teil 2

- Messunsicherheiten
- Auswertung von Messdaten
- Fehlerfortpflanzung
- Ergebnisdarstellung

# Protokollführung

## Versuchs- Vorbereitung

- Abholung der **ersten** Versuchsanleitung des Semesters im Praktikumsraum (**4.244**) mindestens **eine Woche** vor Versuchsbeginn
- Die Versuchsanleitung für den jeweils nächsten Versuch befindet sich am Versuchsplatz (*Vorbereitungszeit* **2 Wochen**)
- Die Versuchsanleitung ist durchzuarbeiten.
- Erstellung eines Messwertprotokolls (*Ablaufplan*)
- schriftliche Beantwortung der Fragen zur Vorbetrachtung
- Mitzubringen sind:
  - lose **karierte** DIN A4 Blätter zum Beschreiben
  - Zeichen- und Funktionspapier DIN A4  
(*Homepage* oder [www.papersnake.de](http://www.papersnake.de))
  - Taschenrechner, Lineal, Schreibgerät

# Protokollführung

## Versuchs- Durchführung

- pünktlicher Versuchsbeginn zu den ausgewiesenen Zeiten
- Überprüfung der Geräte und Zubehör am Versuchsplatz auf Vollständigkeit anhand der Geräteliste
- keine eigenmächtige Reparatur bzw. Austausch von Geräten vornehmen
- Arbeitsbeginn nach Einweisungen des Betreuers
- Sauberes, zügiges und konzentriertes Arbeiten
- Im Praktikum wird in erster Linie gemessen!
- Eintragung der Messwerte in vorgefertigtes Messwertprotokoll (*nicht mit Bleistift*)
- Versuchsplatz so verlassen, wie er vorgefunden wurde!
- Messwertprotokoll vom Betreuer unterzeichnen lassen

# Protokollführung

## Versuchs- Auswertung

- Protokollabgabe: **1 Woche** nach Versuchsende
- handschriftlich, sauber und übersichtlich im DIN A4-Format
- mit Heftstreifen (*Aktendulli*) zusammengeheftet
- Protokollaufbau:
  - Deckblatt
  - Versuchsanleitung
  - unterzeichnetes Messwertprotokoll
  - Vorbetrachtungsaufgaben
  - Aufgaben und Berechnungen
    - o klar strukturiert und nachvollziehbar
    - o Gegeben, Gesucht, Lösung
    - o ggf. Skizzen verwenden
    - o Beispielrechnung mit Zahlenwert und Einheit
    - o Fehlerrechnung
    - o Ergebnisse **zweimal** unterstreichen
  - Diagrammdarstellung
    - o auf Millimeter- oder andere Funktionspapiere
    - o ein Diagramm pro Blatt
- Korrekturen mit Korrekturblatt **hinter** das Protokoll heften.

# Protokollführung

## Versuchs- Vorbereitung

***Jede Versuchsgruppe hat zum Versuch ein  
Messwertprotokoll anzufertigen!***

***Dieses Messwertprotokoll ist Bestandteil  
der Versuchsvorbereitung und  
ist vor Versuchsbeginn vorzulegen!***

## Versuchs- Durchführung



***Handys während des Praktikums  
ausschalten und wegpacken!***

## Versuchs- Auswertung

***Für Protokoll bzw. Diagrammdarstellungen  
kein Excel oder vergleichbare Programme  
verwenden!***



# Protokollführung

## Gründe für die Nichtanerkennung eines Protokolls

- Auswertung mit Excel oder vergleichbarer Programme
- Nichtbeachtung der geforderten Vorgaben
- Nichteinhaltung der äußeren Form
- Unkorrekte Durchführung der Messaufgaben
- Nichtbeachtung der Fragestellung
- Grobe Fehler
  - Berechnung
  - Fehlerbetrachtung
  - Diagrammdarstellung



# Inhalt

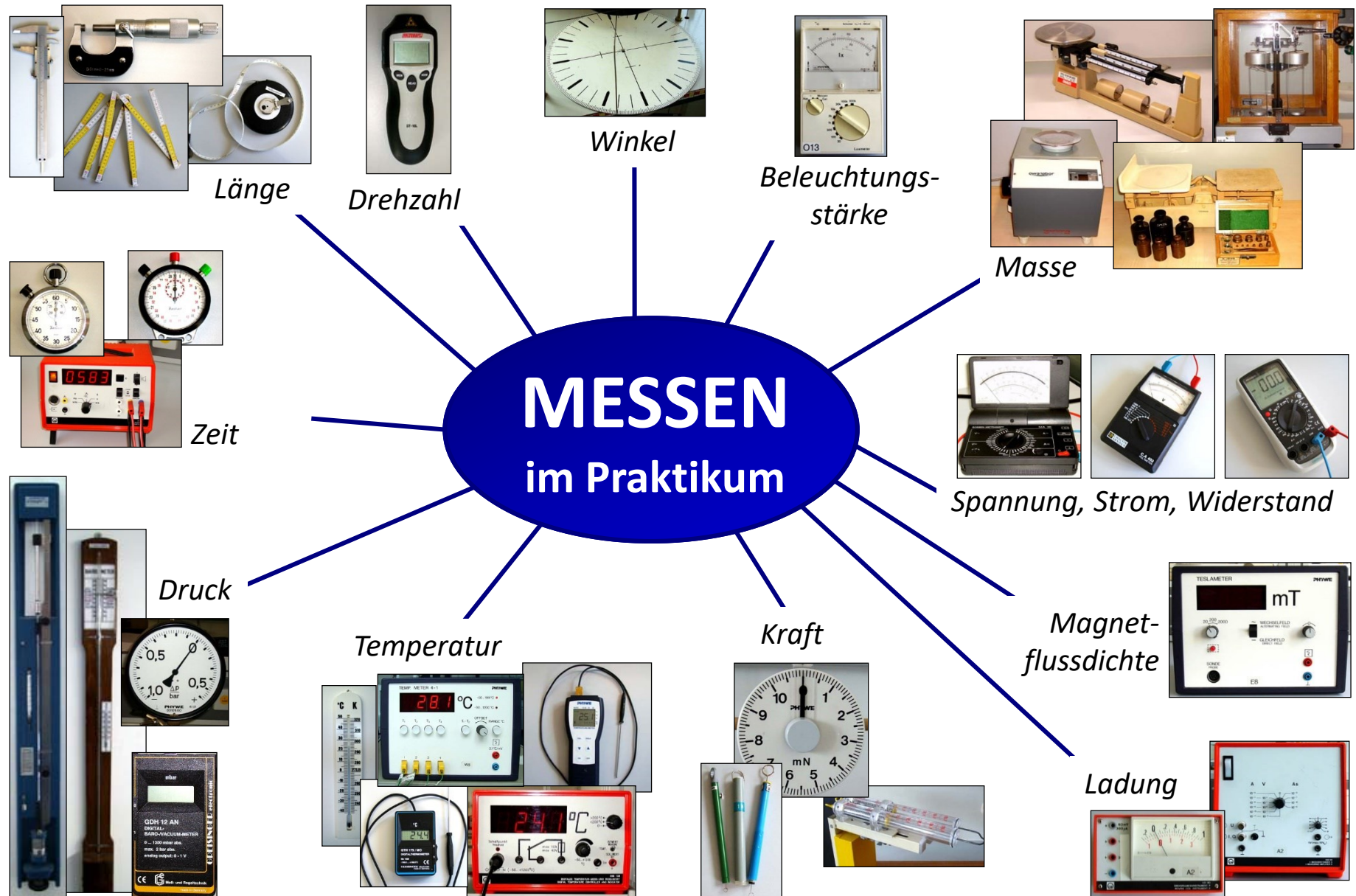
## Teil 1

- Vorstellung des Praktikums
- Allgemeine Hinweise
- Protokollführung
- **Ausgewählte Messverfahren**

## Teil 2

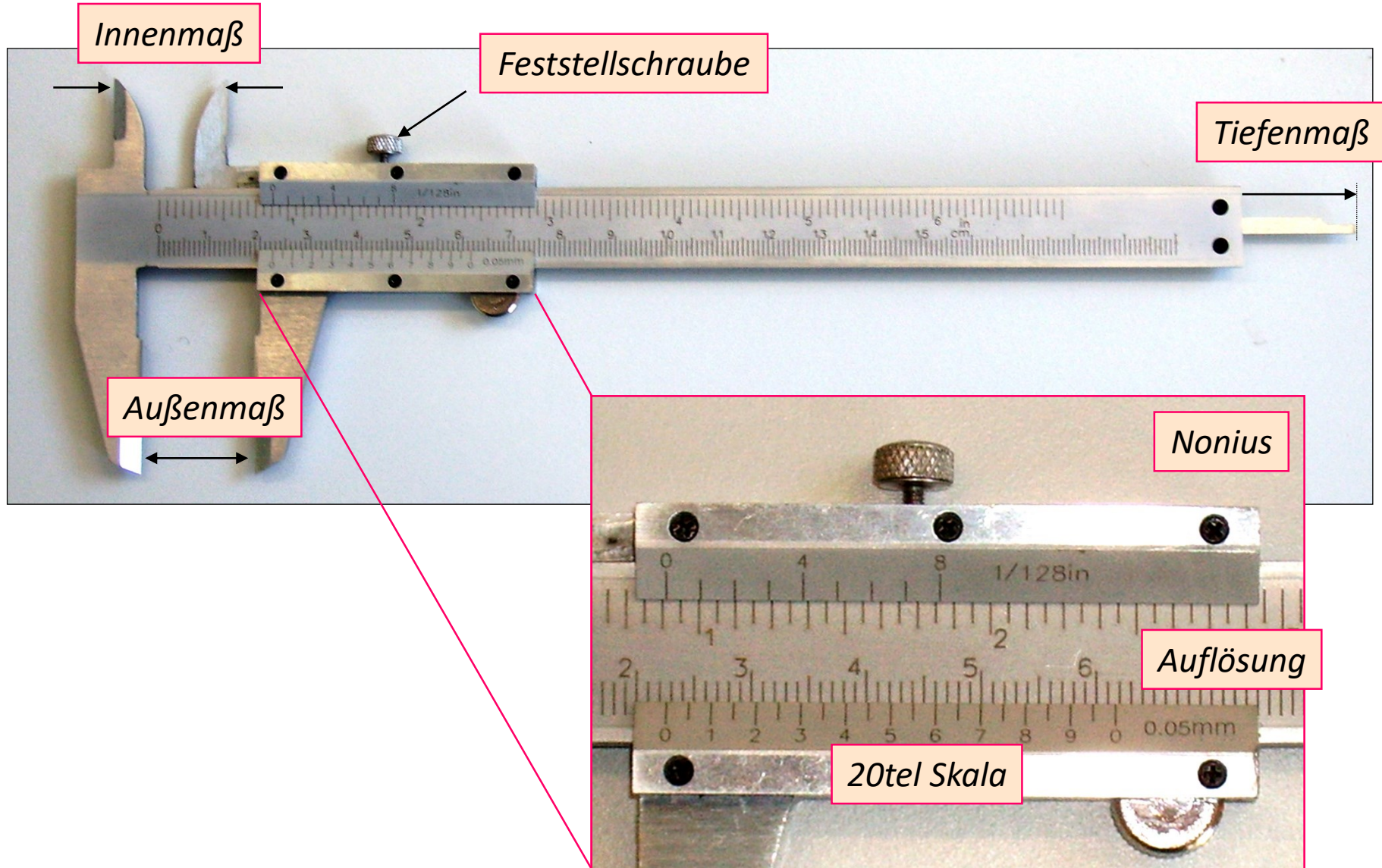
- Messunsicherheiten
- Auswertung von Messdaten
- Fehlerfortpflanzung
- Ergebnisdarstellung

# Ausgewählte Messverfahren



# Ausgewählte Messverfahren

## Messschieber





# Ausgewählte Messverfahren

## Umgang mit dem Nonius

12,00 mm

12,0 mm

12,75 mm

12,6 mm

11,45 mm

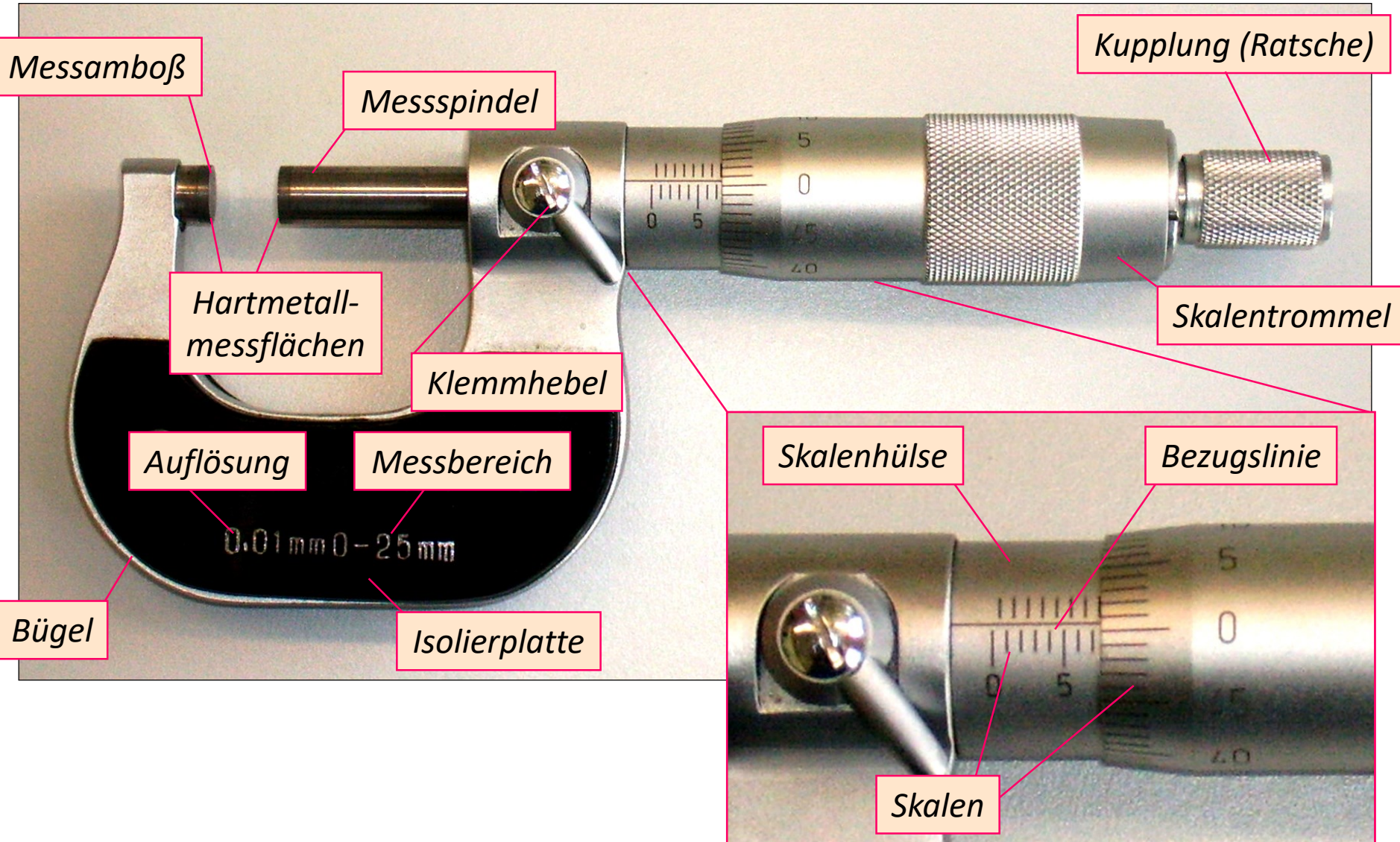
11,4 mm

Auflösung:  $e = 0,05 \text{ mm}$

Auflösung:  $e = 0,1 \text{ mm}$

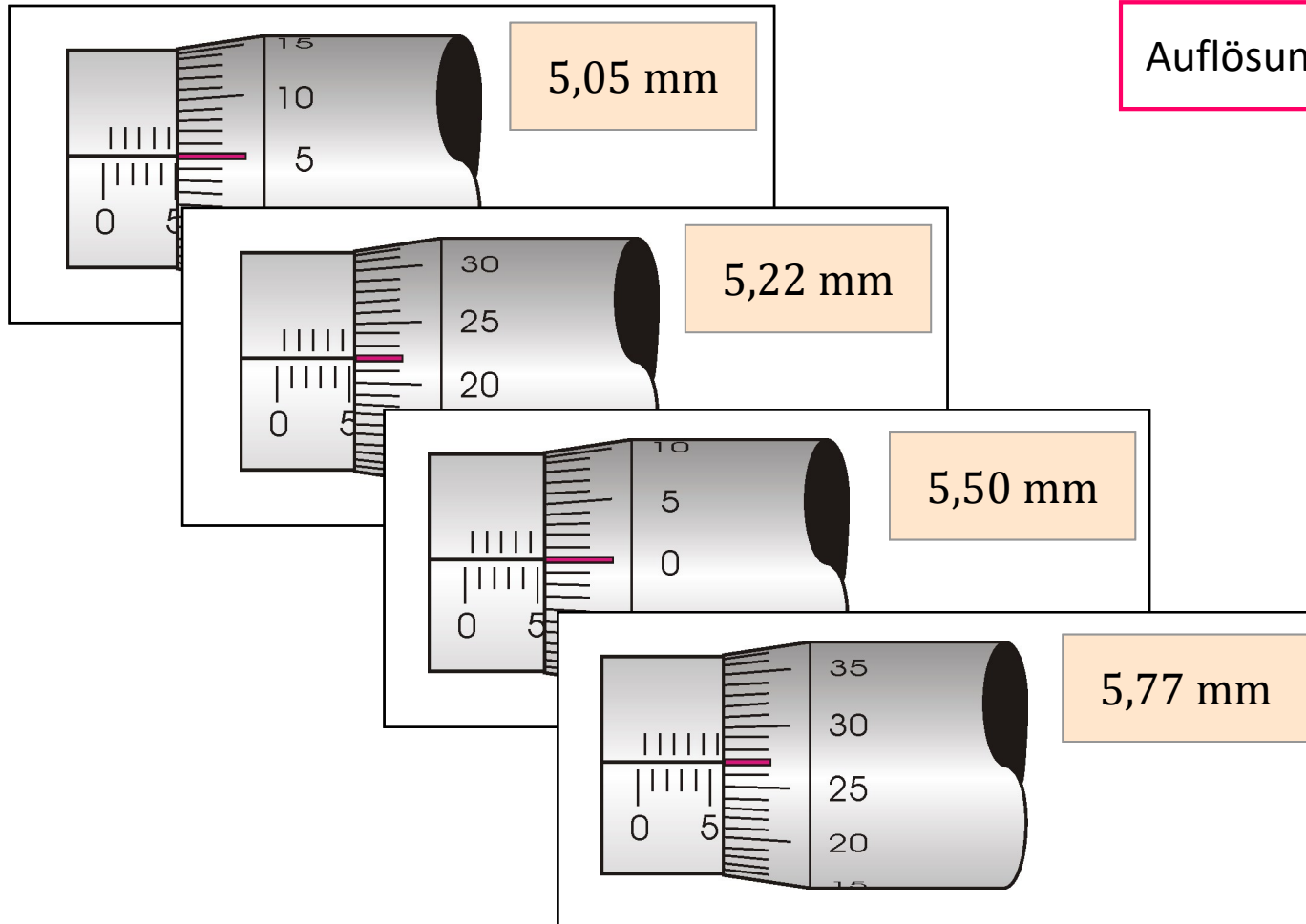
# Ausgewählte Messverfahren

## Bügelmessschraube



# Ausgewählte Messverfahren

## Richtiges Ablesen der Skala an einer analogen Bügelmessschraube





# Ausgewählte Messverfahren

## Analysenwaage

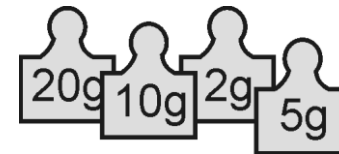
max. Last:  $m_{max} = 200 \text{ g}$

Auflösung:  $e = 1 \text{ mg}$

Stellrad für  
Feineinstellung  
(100 mg und 10 mg)

### Beispiel:

4 Wägestücke



37,000 g

Feineinstellung  
am Stellrad

0,920 g

Zeigeranzeige

-0,009 g

37,911 g

Wägegut

Wägestücke

Zeigeranzeige (1 mg)

Beim Auflegen der Wägestücke  
immer die **Arretierung** benutzen!



# Ausgewählte Messverfahren

## Barometer

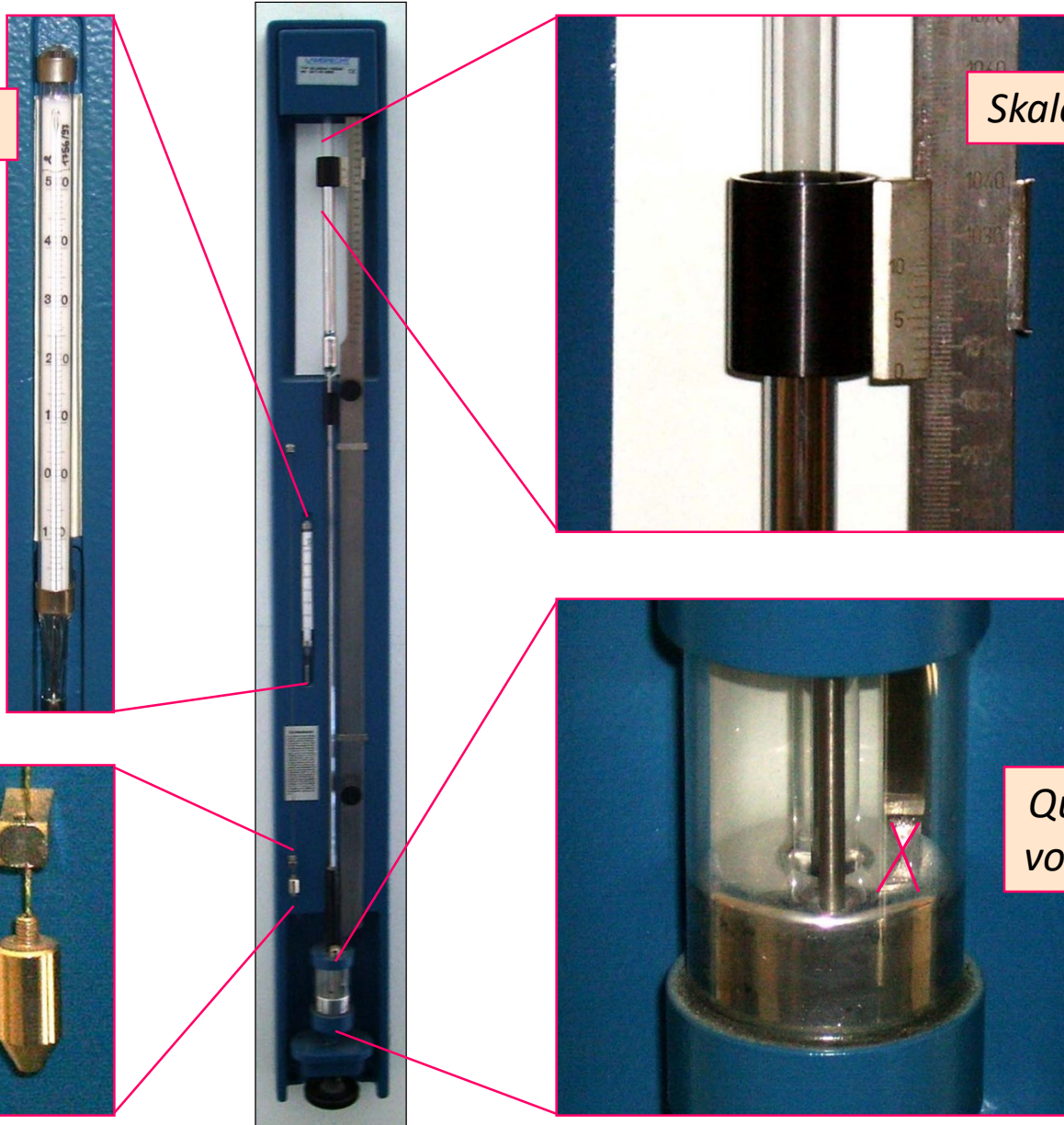
*Thermometer*

*Der Messwert  
wird in **mbar**  
mit einer Nach-  
kommastelle  
direkt abgelesen!*

*Skale mit Nonius*

*Lot*

*Quecksilber-  
vorratsgefäß*



# Ausgewählte Messverfahren

## Analoge Multimeter

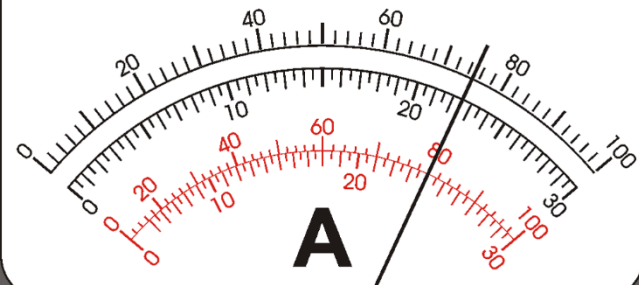


# Ausgewählte Messverfahren

## Umgang mit den Skalen

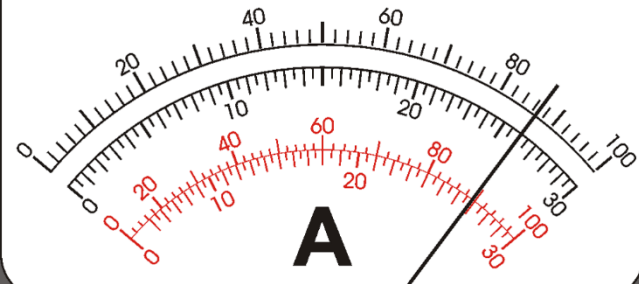
Gleichstrom (DC)

MB = 10 mA



abzulesender Messwert: 7,5 mA

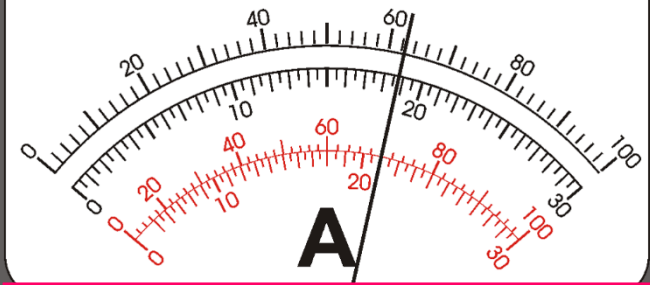
MB = 300  $\mu$ A



abzulesender Messwert: 260  $\mu$ A

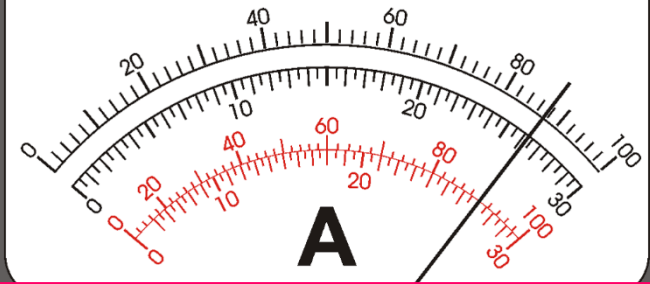
Wechselstrom (AC)

MB = 1 A



abzulesender Messwert: 0,7 A

MB = 30 mA



abzulesender Messwert: 27 mA

# Ausgewählte Messverfahren

- Das Oszilloskop ist ein **VERBESSERTES VOLTMETER** .
- **VOLTMETER** , weil es die Potentialdifferenz (*oder Spannung*) zwischen **zwei Punkten eines Stromkreises** messen kann.  
Es wird folglich parallel zu den zwei interessierenden Punkten angeschlossen.
- **VERBESSERTES** , weil es damit möglich ist, diese Spannung in ihrer **Zeitabhängigkeit** sichtbar zu machen.  
Parameter wie Amplitude und Periode einer Wechselspannung werden dabei gemessen. Dann funktioniert das Oszilloskop als **Y-t-Schreiber**, was der am häufigsten verwendete Modus ist.

***Die Spannung wird als Funktion der Zeit abgebildet.***

- Im **X-Y-Betrieb** stellt das Oszilloskop eine Spannung als Funktion einer zweiten Spannung dar.



# Inhalt

## Teil 1

- Vorstellung des Praktikums
- Allgemeine Hinweise
- Protokollführung
- Ausgewählte Messverfahren

## Teil 2

- **Messunsicherheiten**
- Auswertung von Messdaten
- Fehlerfortpflanzung
- Ergebnisdarstellung

# Messunsicherheiten

## Art der Messabweichungen

- Grobe Messabweichungen
- Systematische Messabweichungen
- Zufällige Messabweichungen
- Gesamtabweichungen



# Grobe Messabweichungen

- Meist durch Unachtsamkeit

---

- Zahlendreher (*12,5 statt 15,2*)

---

- Beim Ablesen von Skalen (*25,1 statt 25,6*)

**Lassen sich natürlich vermeiden!**

# Systematische Messabweichungen

- ist eine zeitlich konstante Abweichung, die sich **nicht** durch Wiederholungen feststellen oder beeinflussen lässt (*Herstellerangaben*).
- Wenn man die Abweichung kennt, kann man diese
  - durch Justierung verringern oder eliminieren,
  - durch Einhaltung zulässiger Umgebungsbedingungen verhindern,
  - durch geänderten Messaufbau vermeiden,
  - durch Toleranzen bzw. Fehlergrenzen in der Auswertung berücksichtigen.

**Sie bleiben bei Messwiederholungen konstant!**

Systematische Messabweichungen einiger Messmittel siehe Arbeitsunterlagen.

# Zufällige Messabweichungen

- Begrenzte Anzeige- und Einstellgenauigkeit der Geräte
- Unzulänglichkeit menschlicher Sinnesorgane
- Veränderliche äußere Einflüsse  
(z.B. *unsystematische Temperatur- oder Luftdruckschwankungen*)
- Führt zu zufälliger Streuung der Messwerte um den Mittelwert
- Positive und negative Abweichungen gleichhäufig

**unvermeidbar  
gehorchen den Gesetzen der Statistik**

# Gesamtabweichungen (Größtfehler)

- Eine physikalische Messung liefert nie den **Wahren Wert**.
- Der gemessene Wert besitzt immer **Messabweichungen**.

Gesamt-  
abweichung

=

**Z**ufällige  
Messabweichung

+

**S**ystematische  
Messabweichung

$$\Delta X = \Delta_Z X + \Delta_S X$$

*Im Praktikum bevorzugte Schreibweise*

$$u(x) = u_Z(x) + u_S(x)$$



# Inhalt

## Teil 1

- Vorstellung des Praktikums
- Allgemeine Hinweise
- Protokollführung
- Ausgewählte Messverfahren

## Teil 2

- Messunsicherheiten
- **Auswertung von Messdaten**
- Fehlerfortpflanzung
- Ergebnisdarstellung

# Auswertung vom Messdaten

## Lineare Regression

- **Bestimmung durch eine Diagrammdarstellung**
  - auf Millimeterpapier

---
  - auf halblogarithmischem Papier

---
  - auf doppeltlogarithmischem Papier

---
- Bestimmung durch eine Berechnung



# Lineare Regression durch Diagrammdarstellung

## Versuchsaufbau: Torsionsmodul

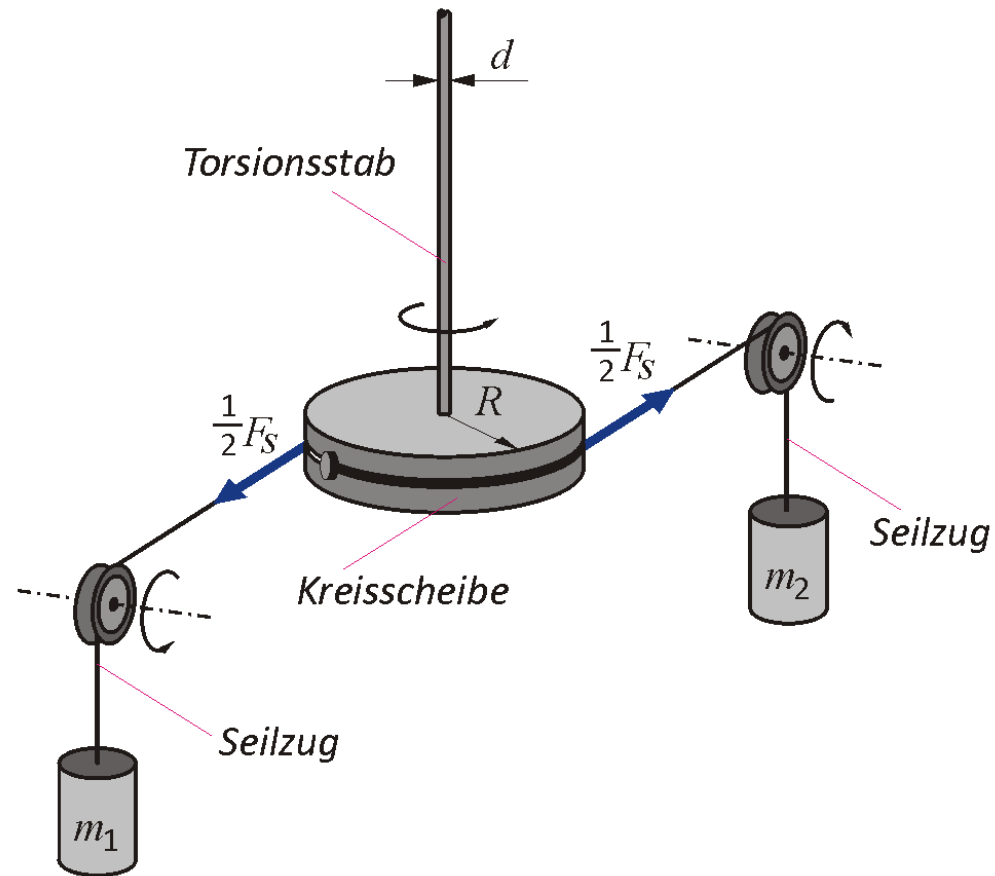
Messwerte

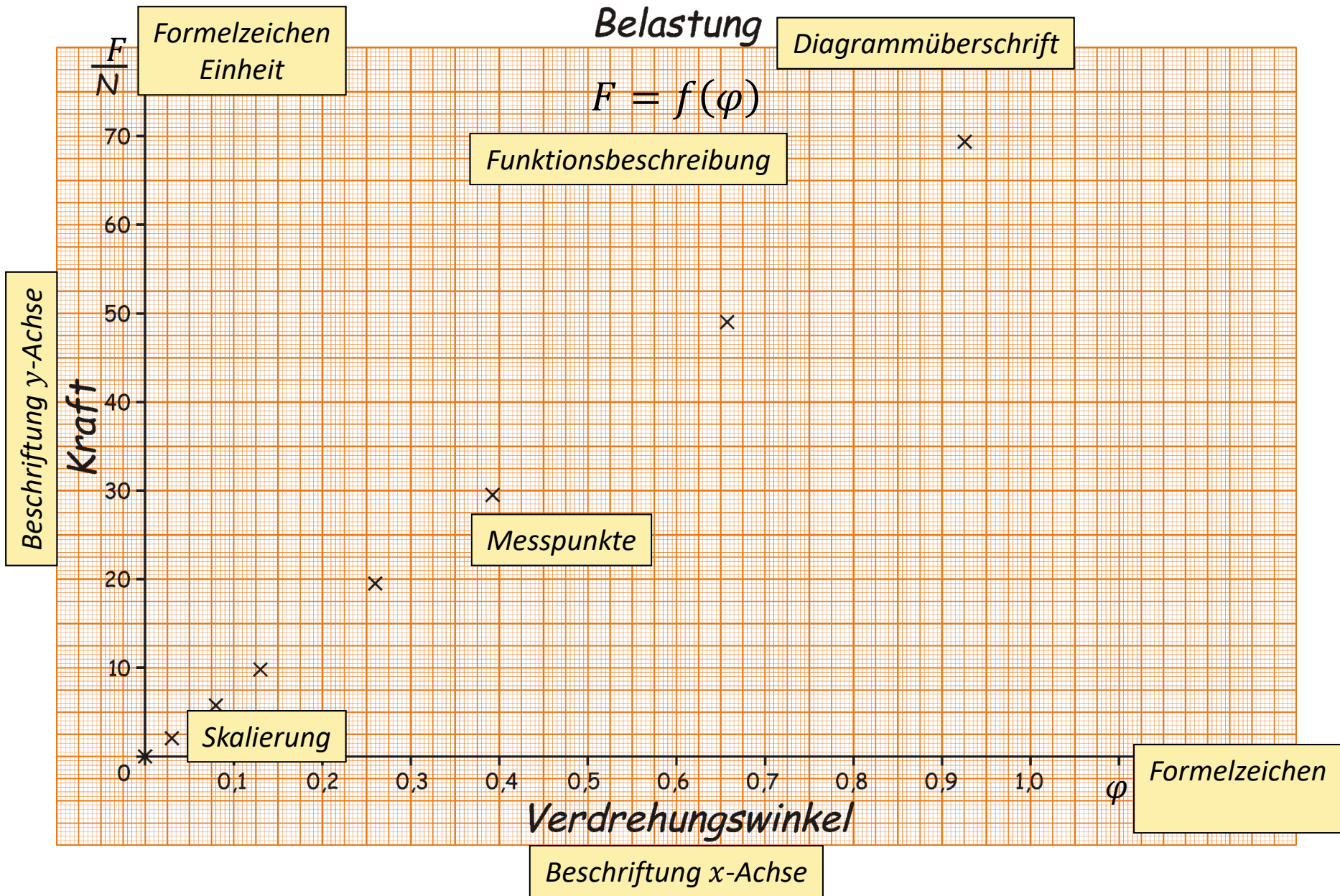
y-Achse

x-Achse

| $\frac{m}{\text{kg}}$ |     | $\frac{F}{\text{N}}$ | $\frac{\varphi}{^\circ}$ | $\varphi$ |
|-----------------------|-----|----------------------|--------------------------|-----------|
| 0,00                  | 0,0 | 0,00                 | 0,0                      | 0,000     |
| $2 \times 0,1$        | 0,2 | 1,96                 | 1,5                      | 0,026     |
| $+2 \times 0,2$       | 0,6 | 5,89                 | 4,5                      | 0,079     |
| $+2 \times 0,2$       | 1,0 | 9,81                 | 7,5                      | 0,131     |
| $+2 \times 0,5$       | 2,0 | 19,62                | 15,0                     | 0,262     |
| $+2 \times 0,5$       | 3,0 | 29,43                | 22,5                     | 0,393     |
| $+2 \times 1$         | 5,0 | 49,05                | 38,0                     | 0,663     |
| $+2 \times 1$         | 7,0 | 68,67                | 53,0                     | 0,925     |

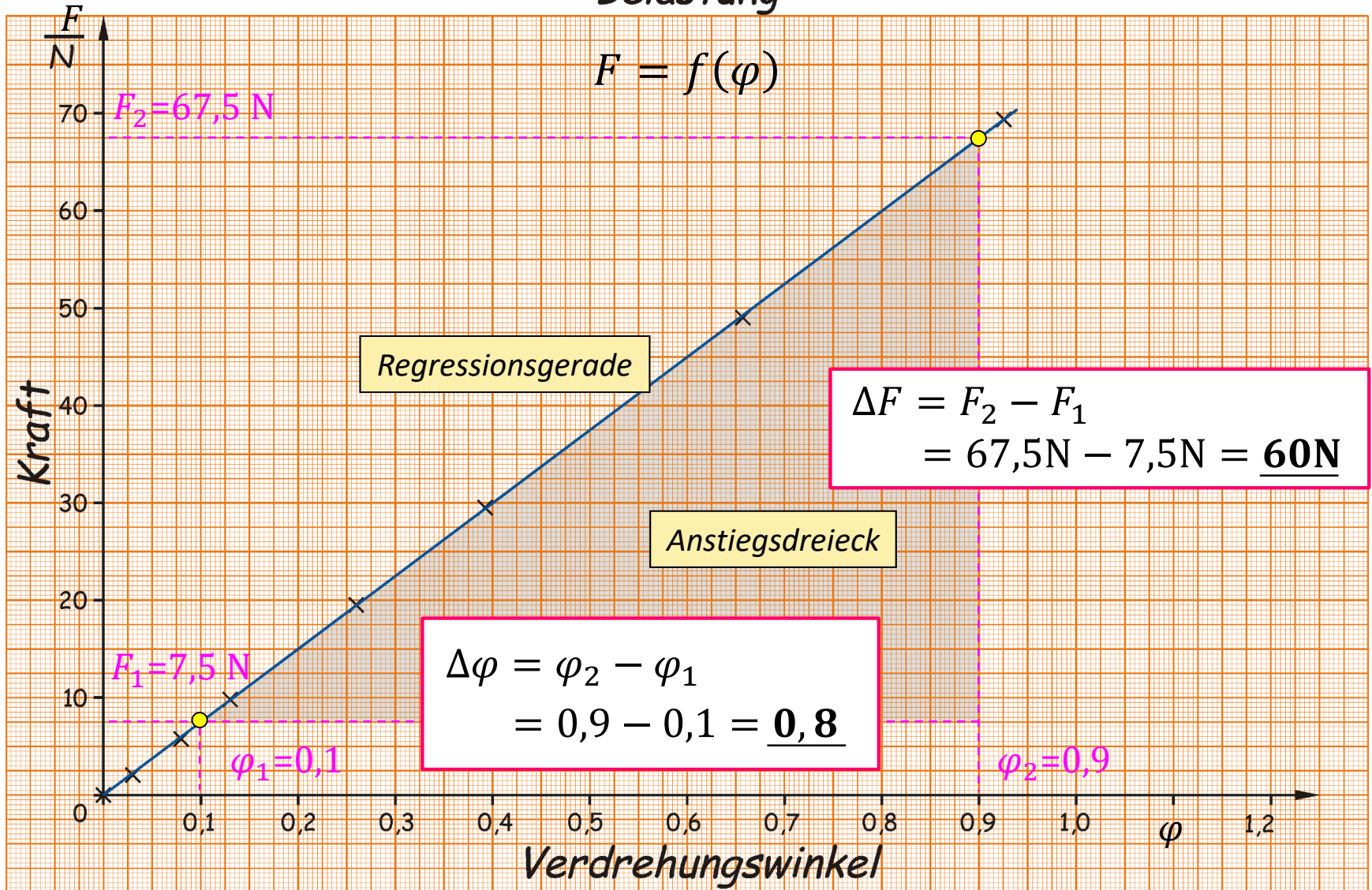
Skizze





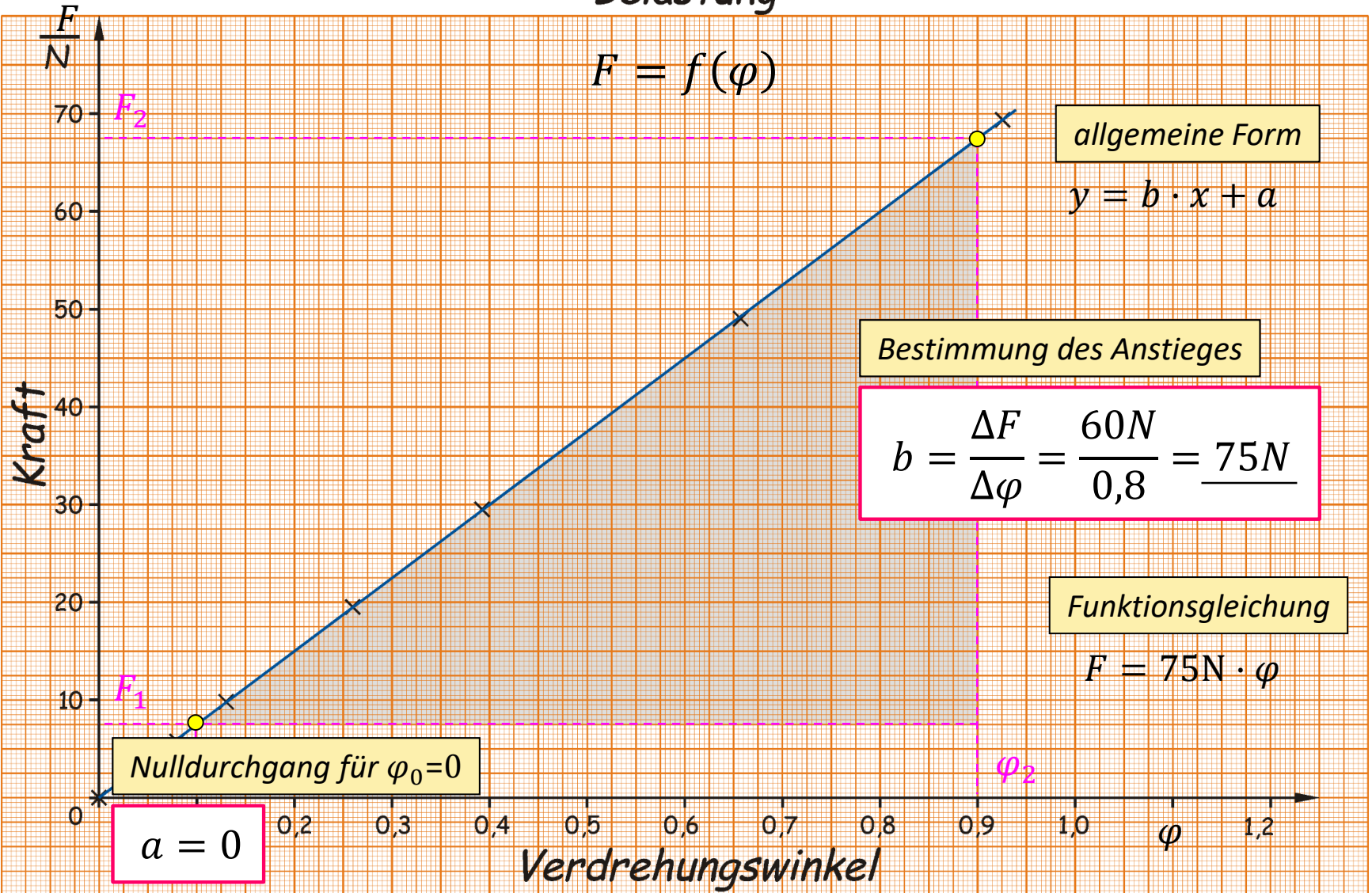
# Belastung

$$F = f(\varphi)$$



# Belastung

$$F = f(\varphi)$$



# Auswertung vom Messdaten

## Lineare Regression

- **Bestimmung durch eine Diagrammdarstellung**
  - auf Millimeterpapier

---
  - auf halblogarithmischem Papier

---
  - auf doppeltlogarithmischem Papier

---
- Bestimmung durch eine Berechnung



# Lineare Regression durch Diagrammdarstellung

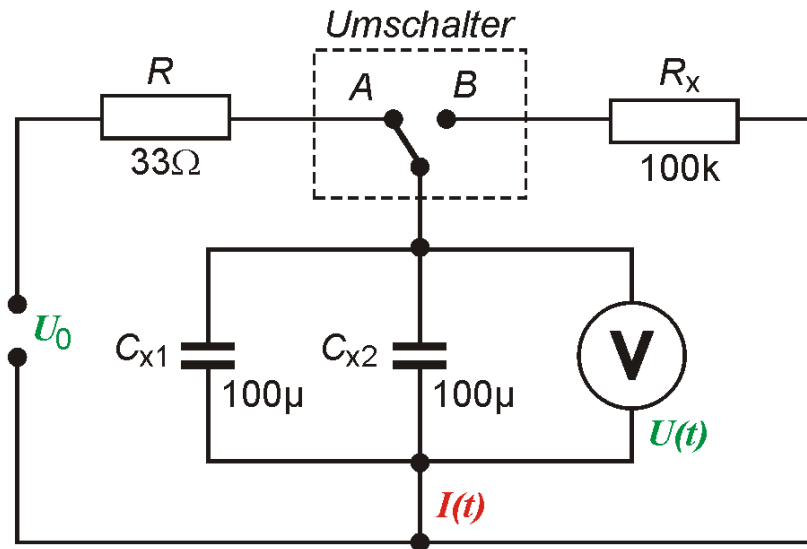
## Versuchsaufbau: Kondensator im Gleichstromkreis

Messwerte

Schaltung

*y-Achse*   *x-Achse*

| $\frac{U}{V}$ | $\frac{t}{s}$ |
|---------------|---------------|
| 10            | 0             |
| 9             | 3             |
| 8             | 6             |
| 7             | 10            |
| 6             | 14            |
| 5             | 20            |
| 4             | 26            |
| 3             | 34            |
| 2             | 46            |
| 1             | 67            |



# Kondensatorentladung

Diagrammüberschrift

$$U = f(t)$$

Funktionsbeschreibung

Formelzeichen  
Einheit

10 \*

$\frac{U}{V}$

Spannung

Beschriftung y-Achse

8

7

6

5

4

3

2

1

0

10

20

30

40

50

80

Skalierung

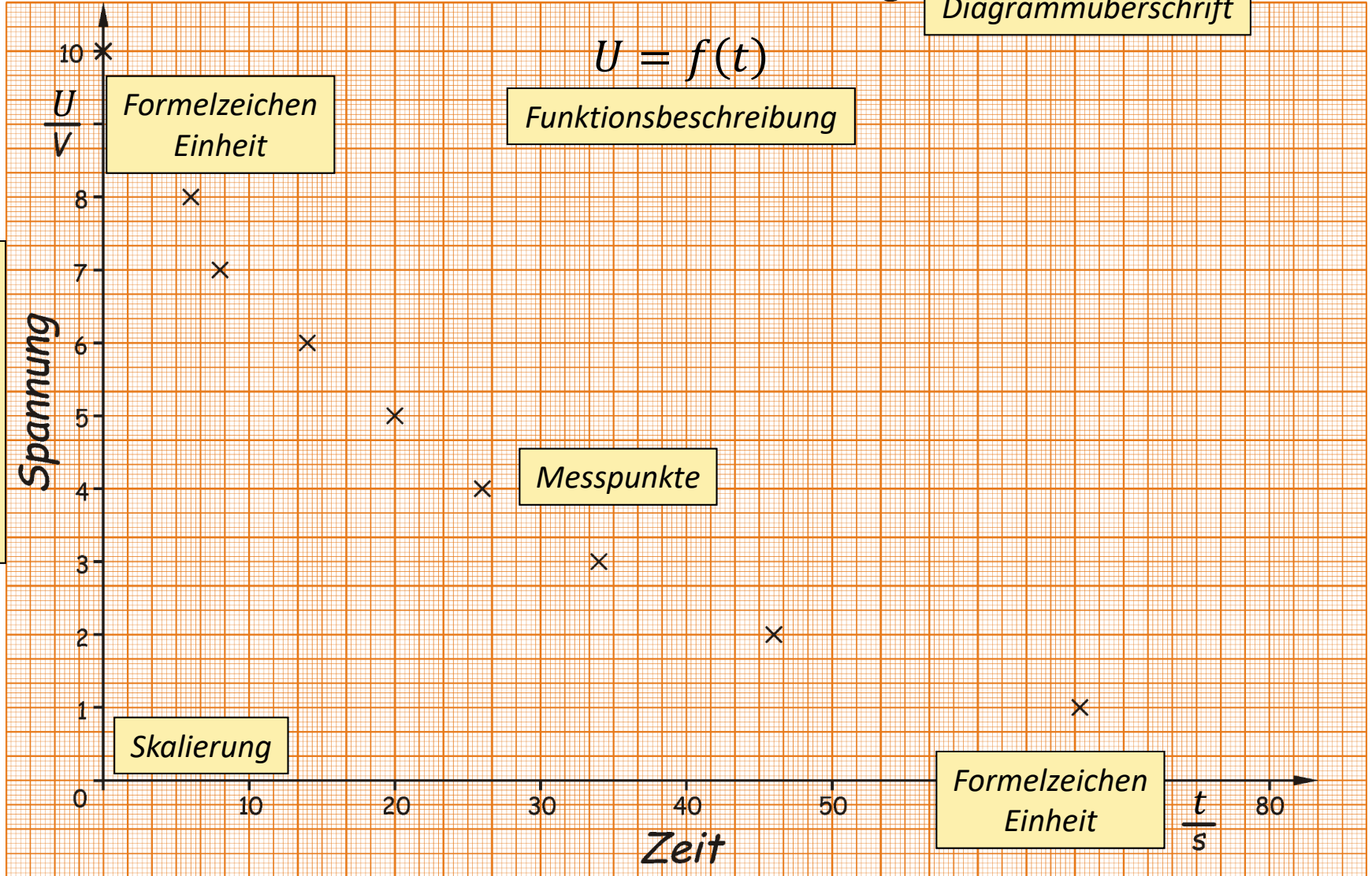
Messpunkte

Formelzeichen  
Einheit

$\frac{t}{s}$

Zeit

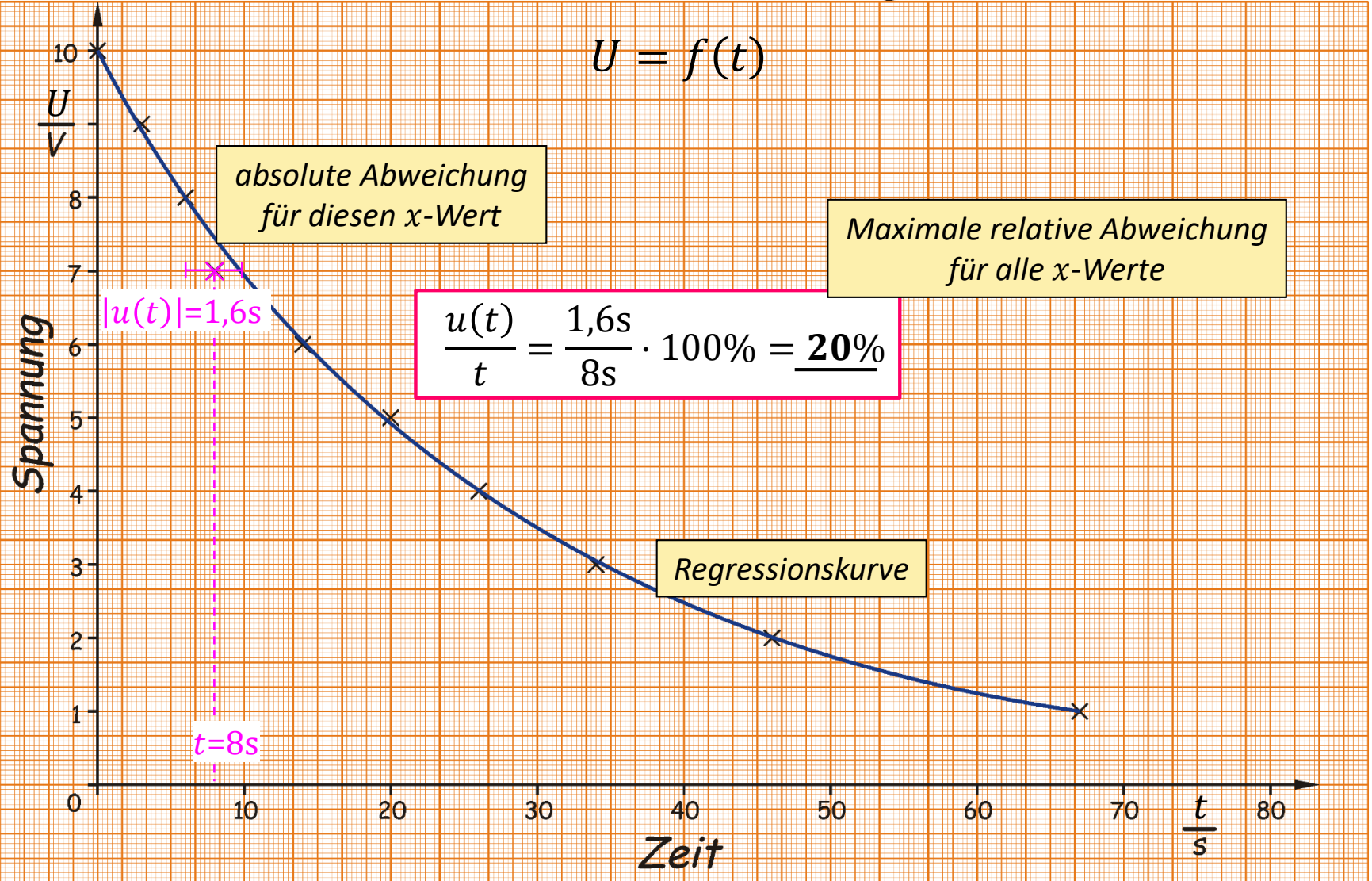
Beschriftung x-Achse





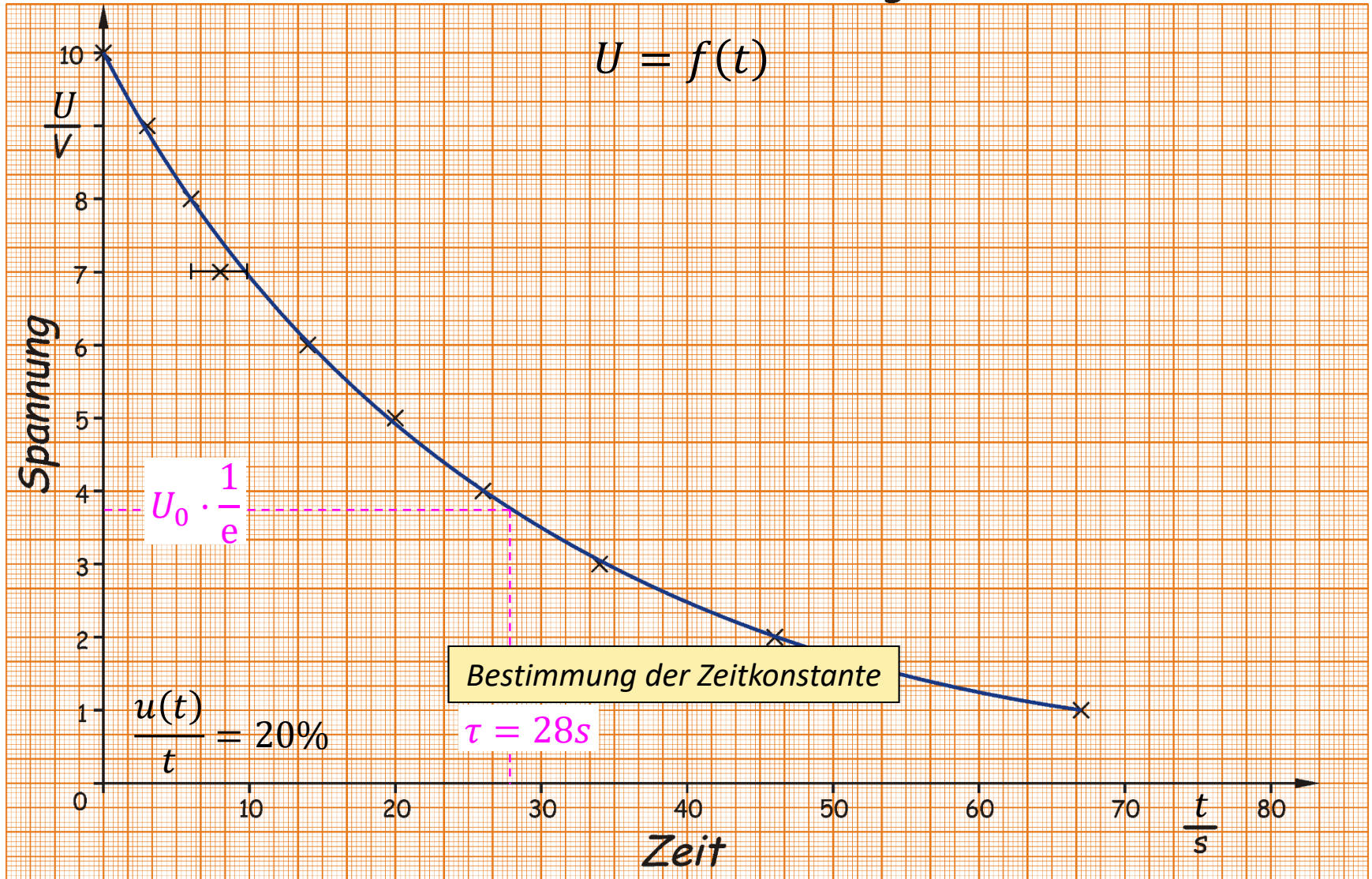
# Kondensatorentladung

$$U = f(t)$$

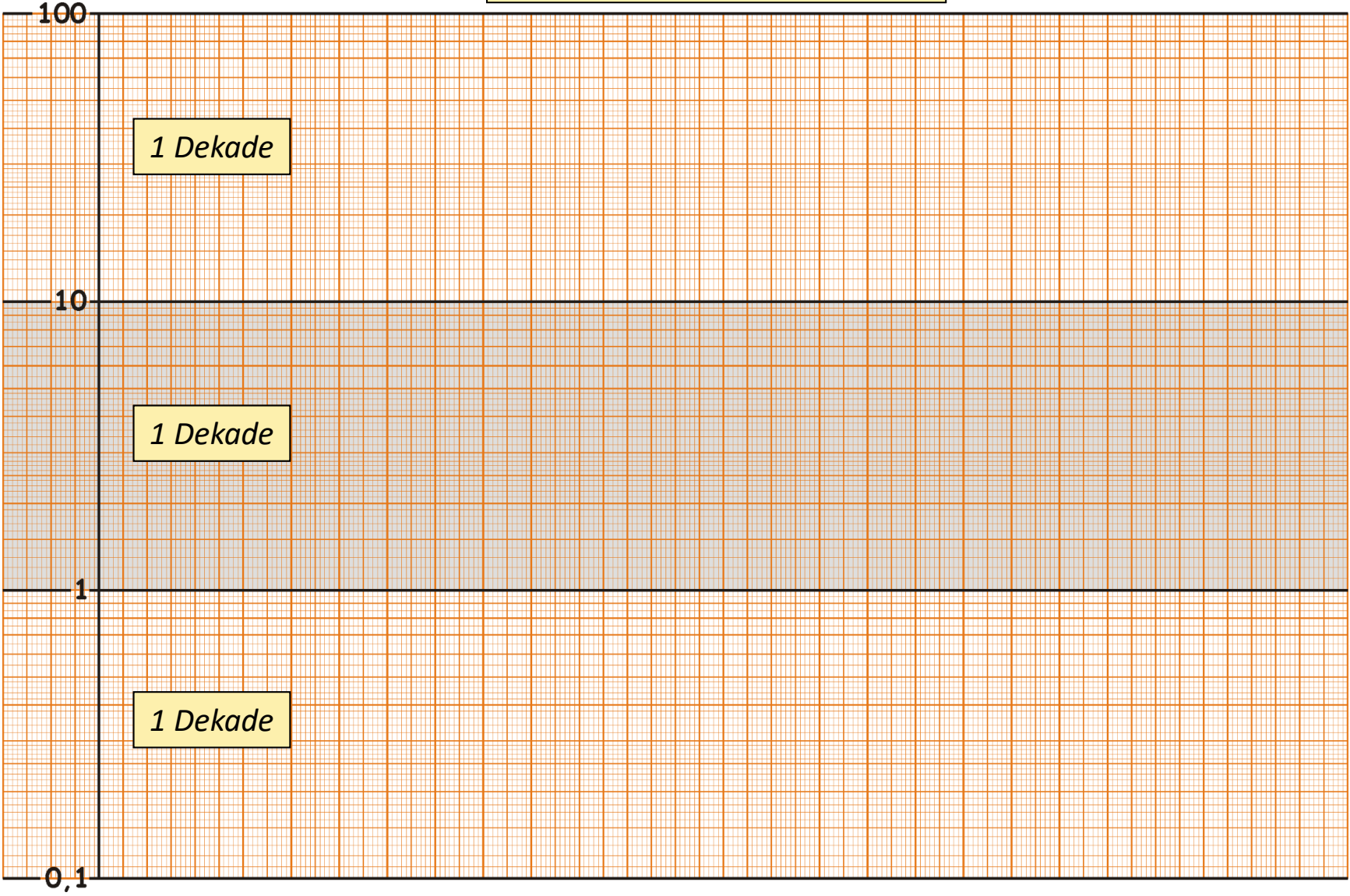


# Kondensatorentladung

$$U = f(t)$$



Halblogarithmische Darstellung



# Kondensatorentladung

Diagrammüberschrift

$$U = f(t)$$

Funktionsbeschreibung

Formelzeichen  
Einheit

Messpunkte

Skalierung

Formelzeichen  
Einheit

Beschriftung x-Achse

Beschriftung y-Achse

Spannung

Zeit

$\frac{t}{s}$

$\frac{U}{V}$

0,1

60

20

10

7

5

3

2

1

0

10

20

30

40

50

80

$\frac{t}{s}$

80

7

5

3

2

1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0,1

0

10

20

30

40

50

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

$\frac{t}{s}$

80

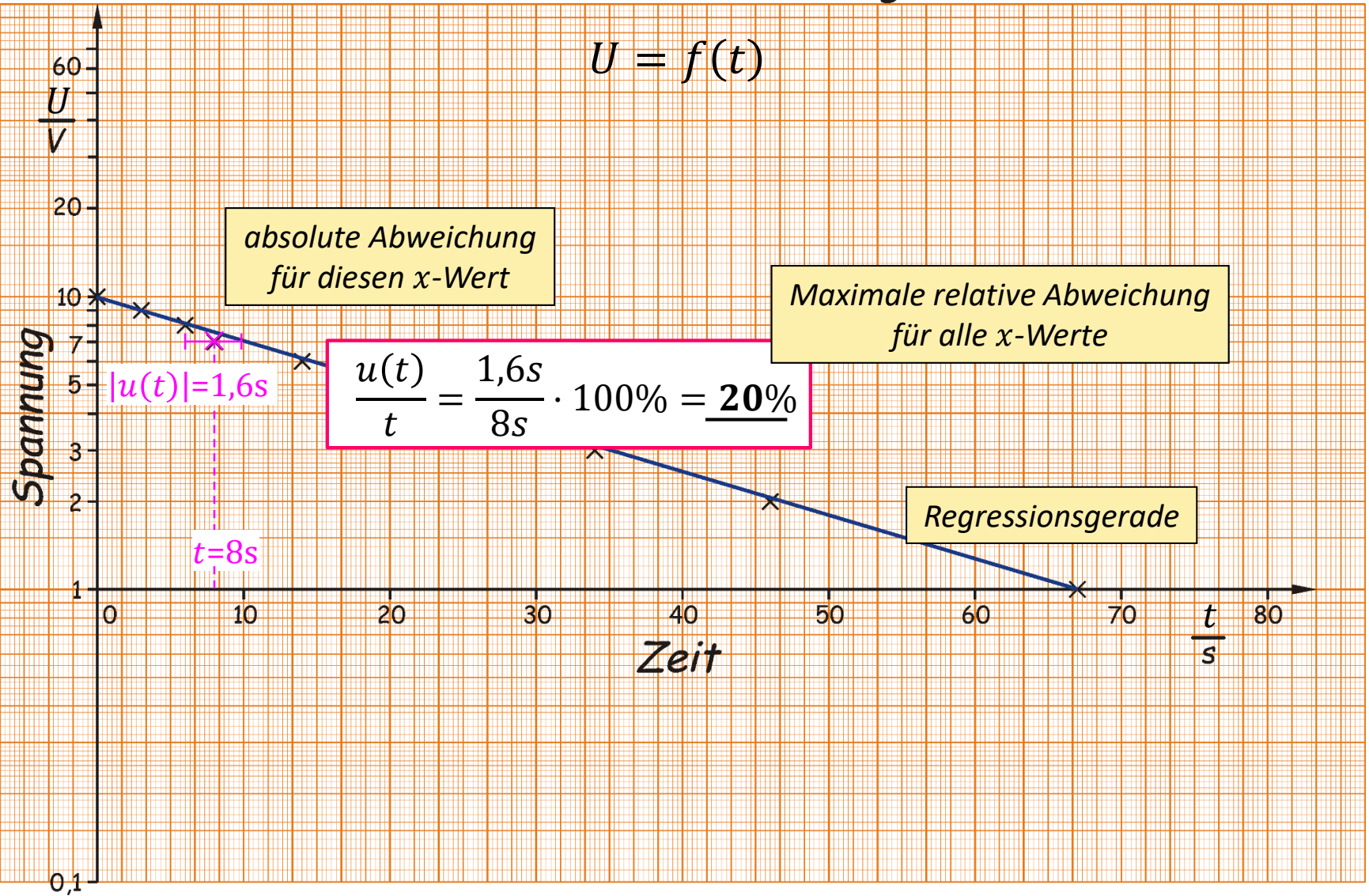
$\frac{t}{s}$

80



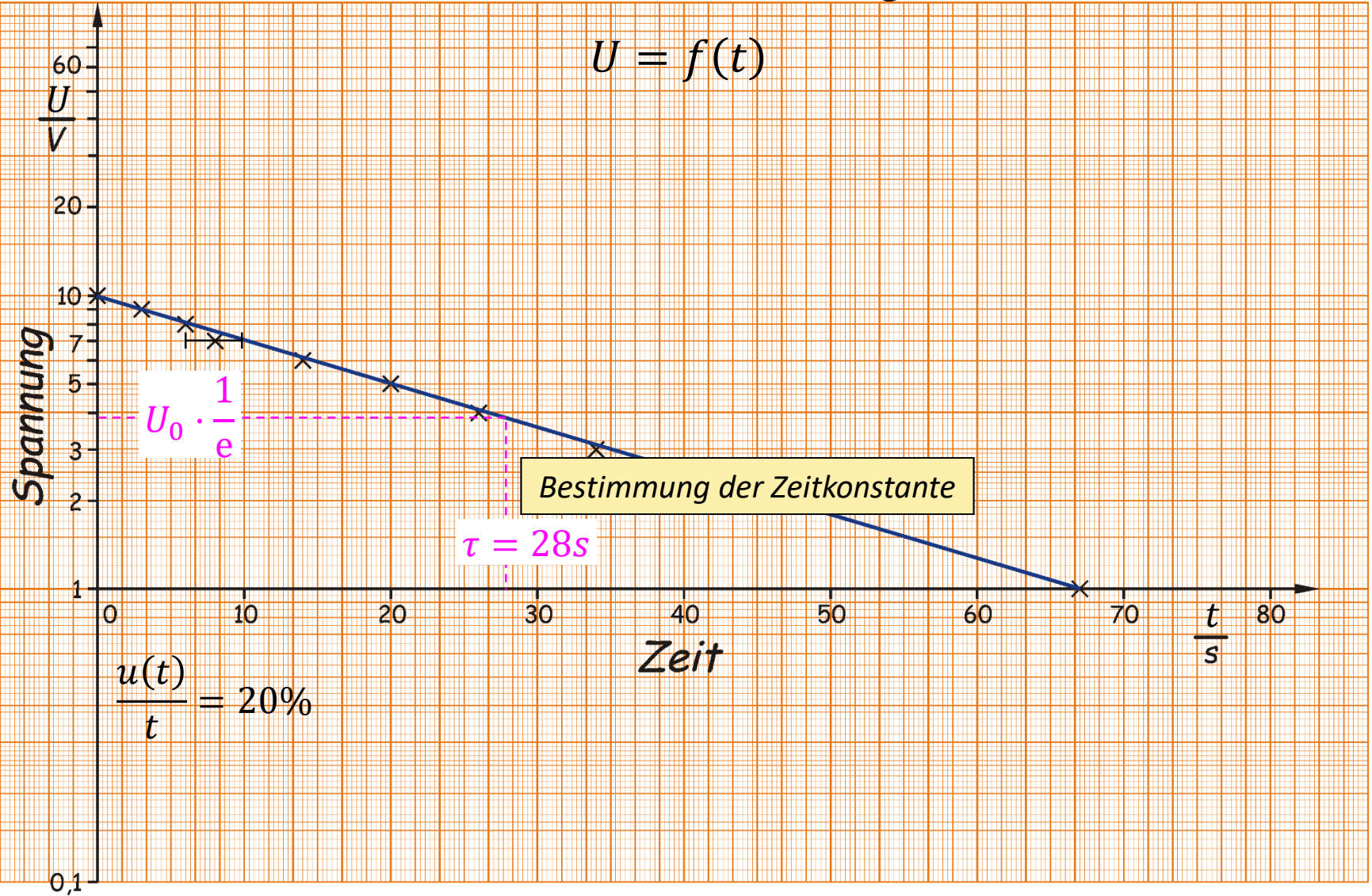
# Kondensatorentladung

$$U = f(t)$$



# Kondensatorentladung

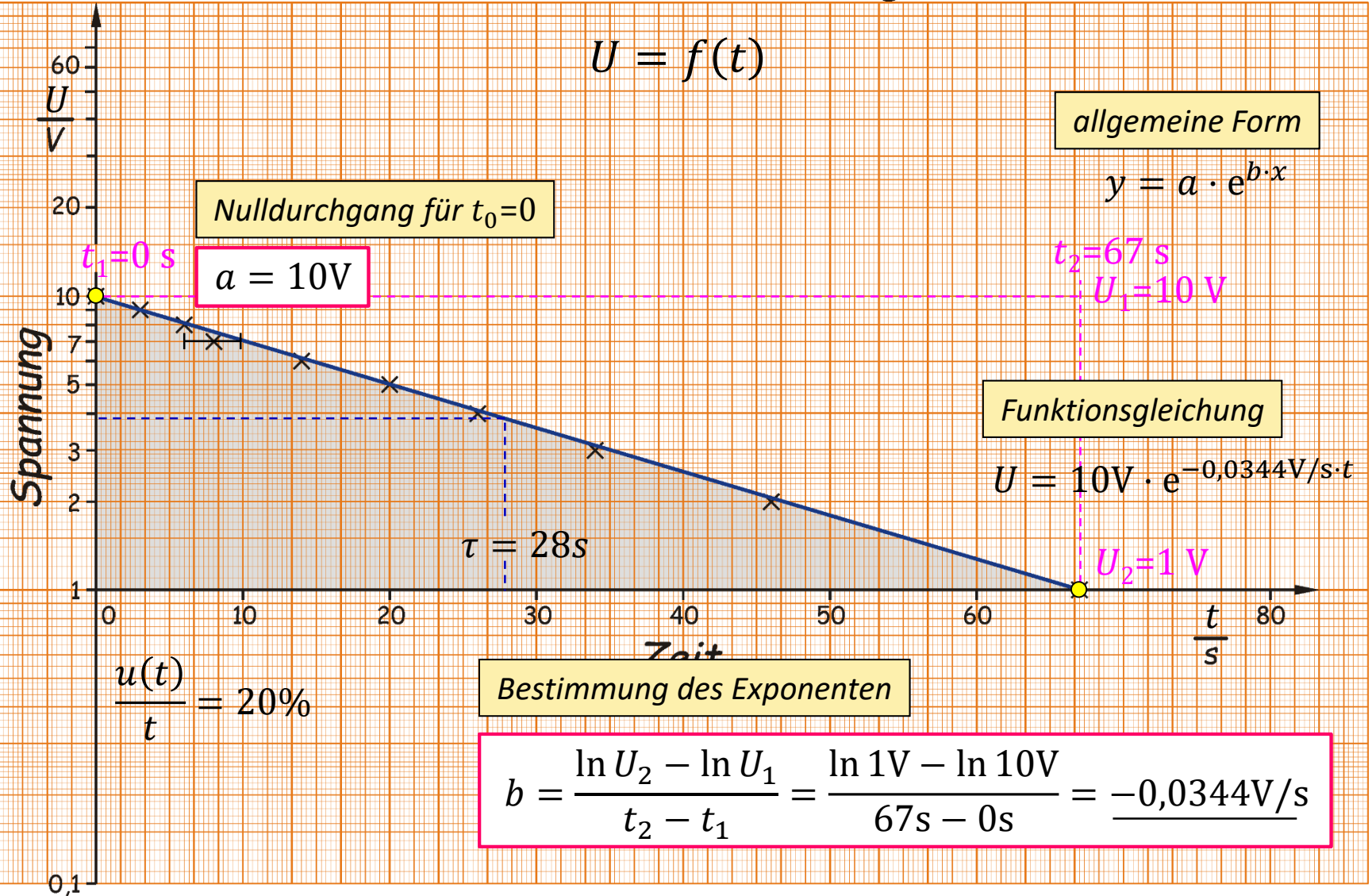
$$U = f(t)$$





# Kondensatorentladung

$$U = f(t)$$



# Auswertung vom Messdaten

## Lineare Regression

- **Bestimmung durch eine Diagrammdarstellung**
  - auf Millimeterpapier

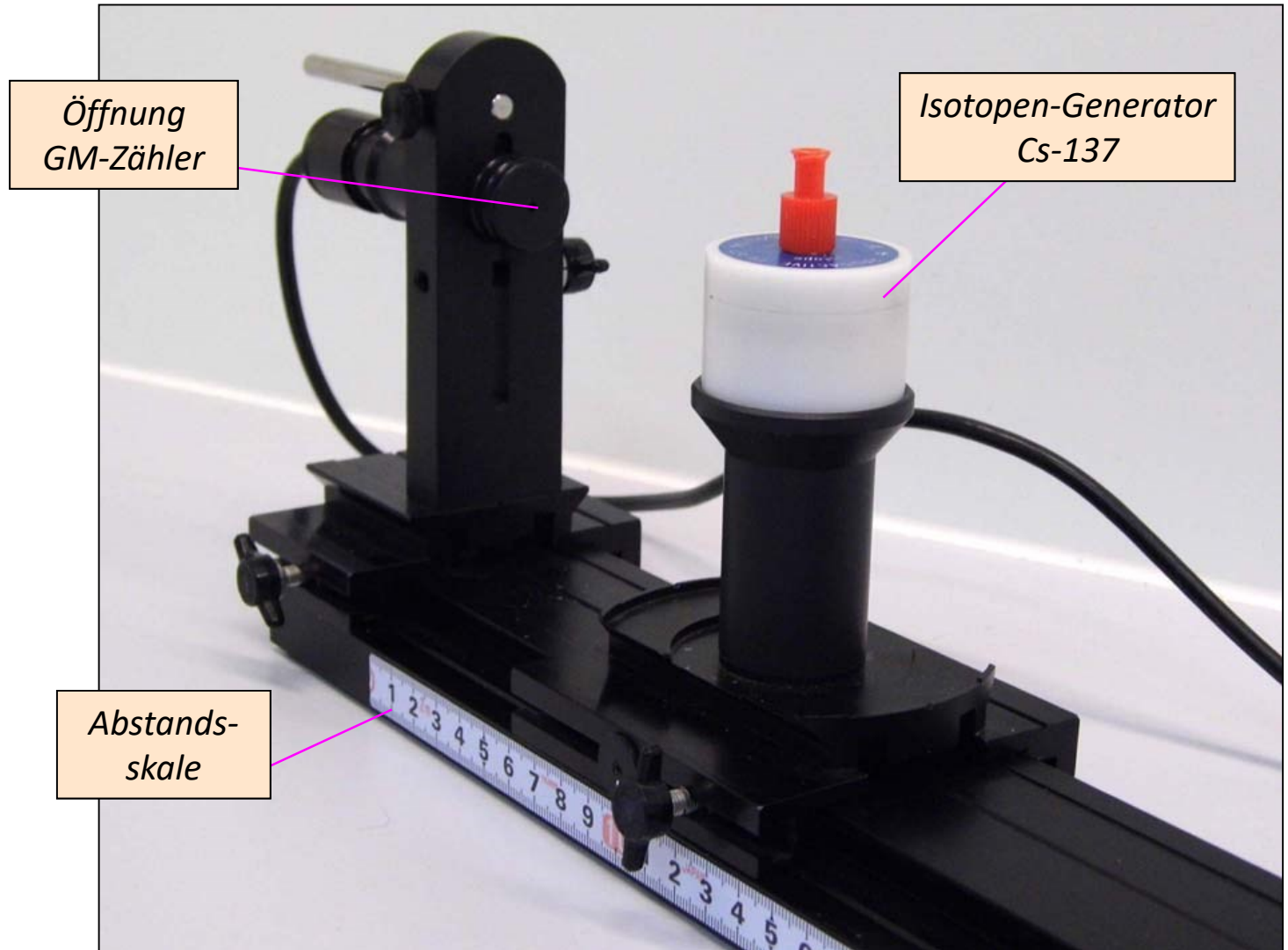
---
  - auf halblogarithmischem Papier

---
  - **auf doppeltlogarithmischem Papier**

---
- Bestimmung durch eine Berechnung

# Lineare Regression durch Diagrammdarstellung

## Versuchsaufbau: Gammastahlen



# Lineare Regression durch Diagrammdarstellung

Messwerte für die Bestätigung des Abstandsgesetzes

Nullrate ohne Präparat:  $N_0 = 0,31 \text{ s}^{-1}$

Messintervall der Zeit:  $t = 100 \text{ s}$

*x-Achse*

*y-Achse*

| Abstand<br>$\frac{a}{\text{cm}}$ | absolute<br>Zählrate<br>$\frac{Z}{1/100\text{s}}$ | normierte<br>Zählrate<br>$\frac{N}{1/\text{s}}$ | korregierte<br>Zählrate<br>$\frac{N_{\text{korrr}}}{1/\text{s}}$ |
|----------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 5,0                              | 1890                                              | 18,90                                           | 18,59                                                            |
| 7,5                              | 1084                                              | 10,84                                           | 10,53                                                            |
| 10,0                             | 777                                               | 7,77                                            | 7,46                                                             |
| 12,5                             | 636                                               | 6,36                                            | 6,05                                                             |
| 15,0                             | 529                                               | 5,29                                            | 4,98                                                             |
| 17,5                             | 491                                               | 4,91                                            | 4,60                                                             |
| 20,0                             | 427                                               | 4,27                                            | 3,96                                                             |
| 22,5                             | 412                                               | 4,12                                            | 3,81                                                             |
| 25,0                             | 431                                               | 4,31                                            | 4,00                                                             |
| 27,5                             | 375                                               | 3,75                                            | 3,44                                                             |
| 30,0                             | 371                                               | 3,71                                            | 3,40                                                             |

$$N_{\text{korrr}} = N - N_0$$

# Abstandsgesetz

Diagrammüberschrift

$$N = f(a)$$

Funktionsbeschreibung

Formelzeichen  
Einheit

$N$   
 $s^{-1}$

Zählrate

Beschriftung y-Achse

Messpunkte

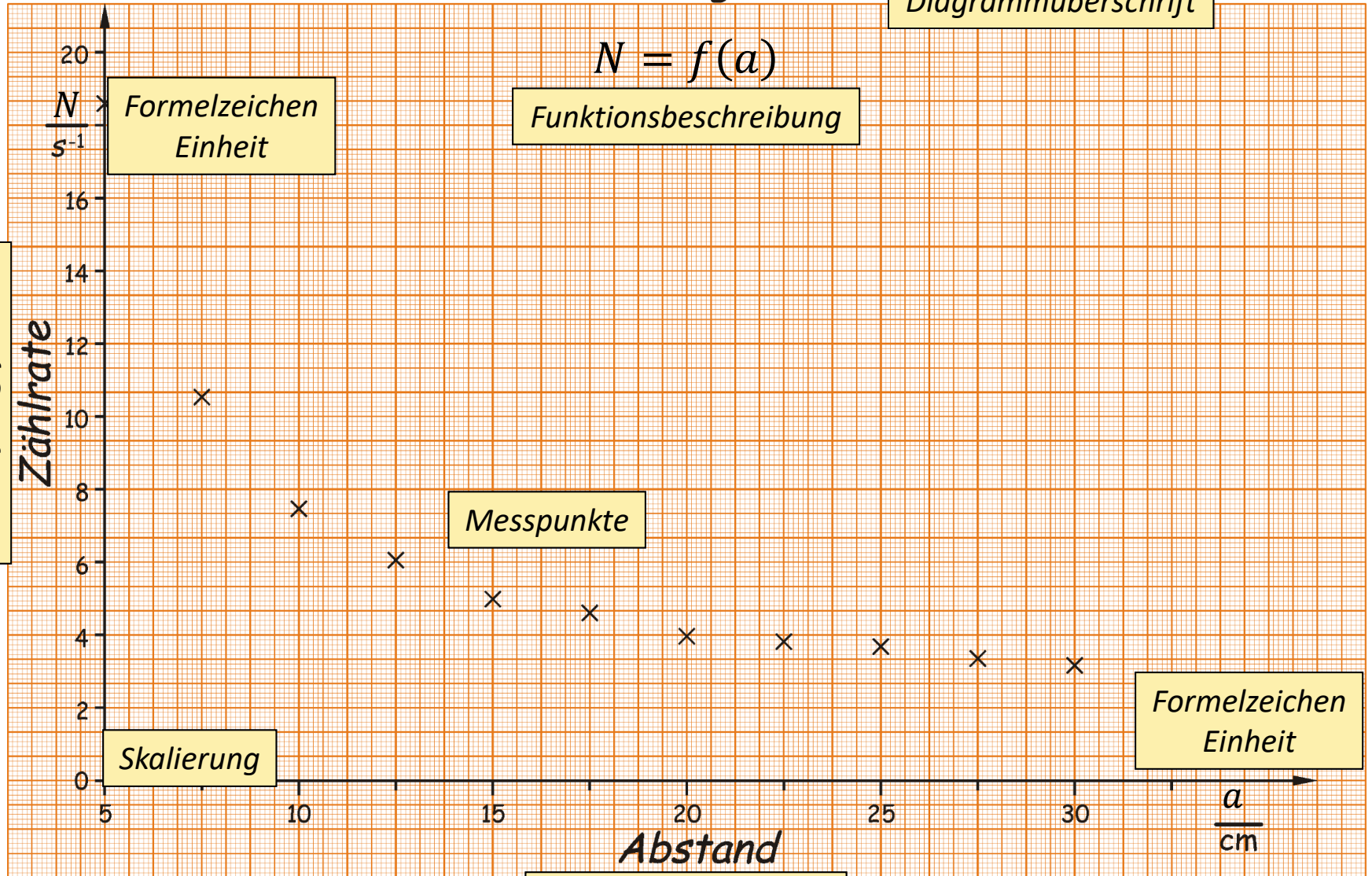
Skalierung

Formelzeichen  
Einheit

$a$   
 $cm$

Abstand

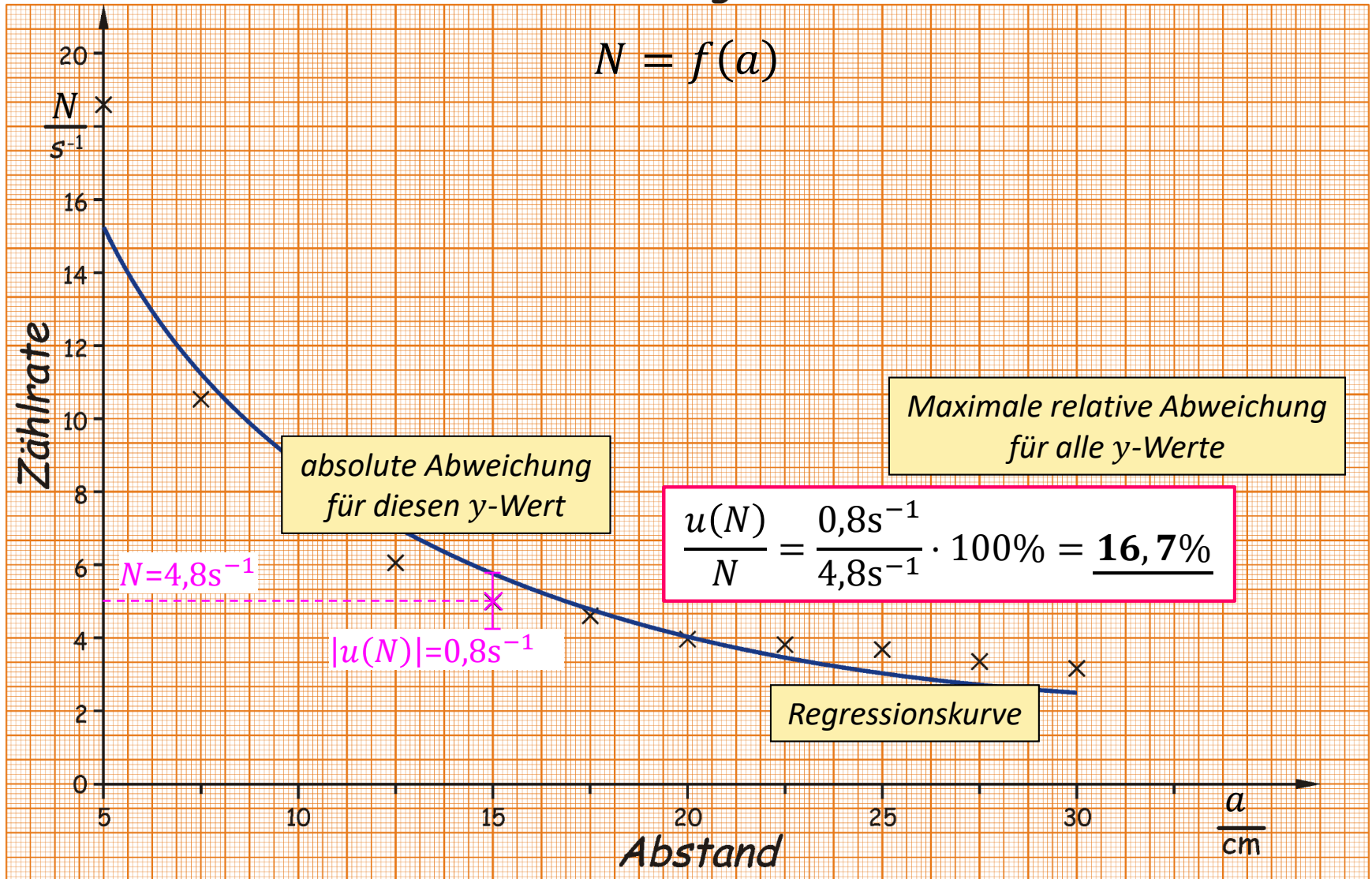
Beschriftung x-Achse





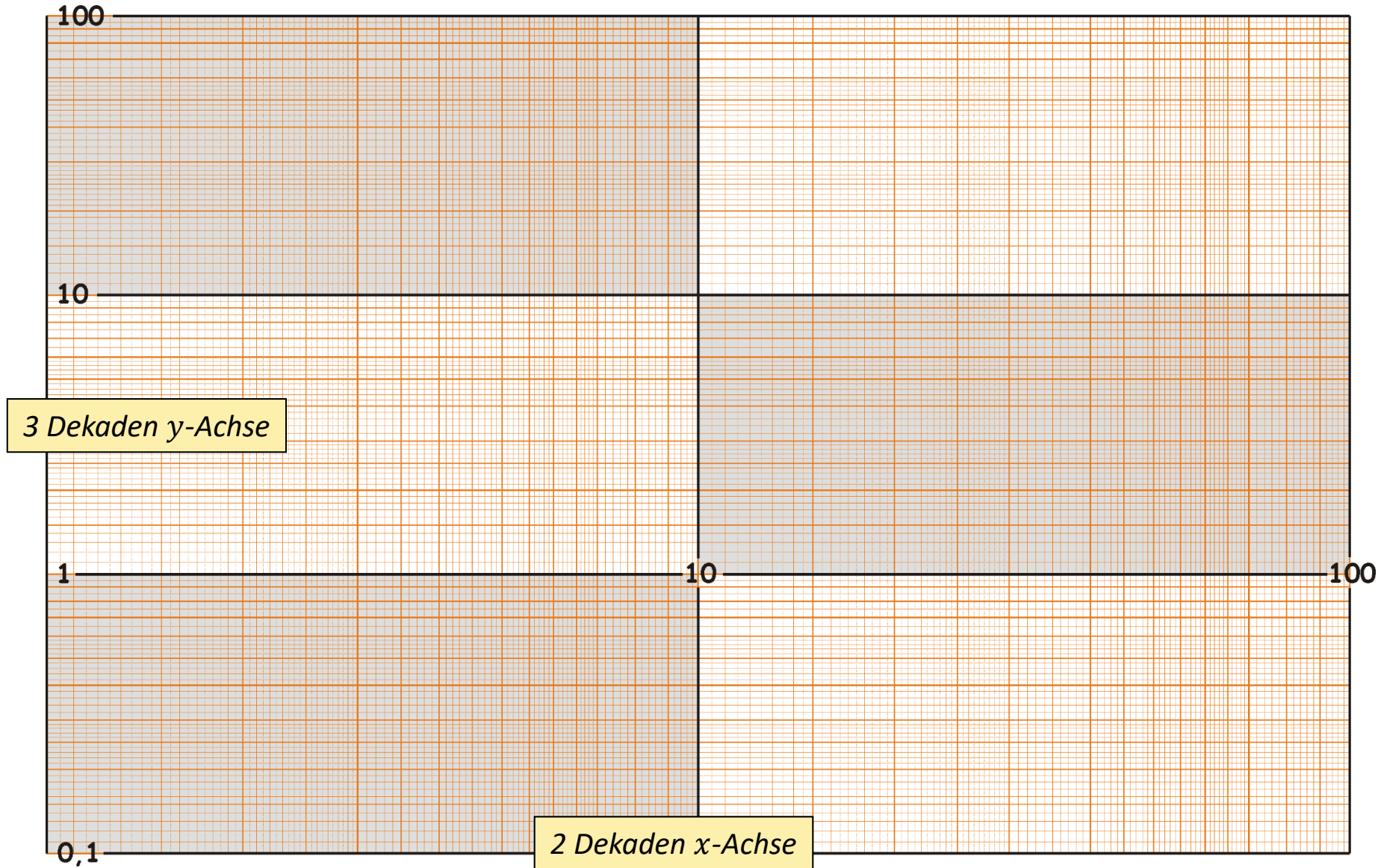
# Abstandsgesetz

$$N = f(a)$$





# Doppellogarithmische Darstellung



# Abstandsgesetz

Diagrammüberschrift

$$N = f(a)$$

Funktionsbeschreibung

$\frac{N}{s^{-1}}$

Formelzeichen  
Einheit

Messpunkte

Zählrate

Skalierung

Formelzeichen  
Einheit

$\frac{a}{cm}$

Abstand

Beschriftung x-Achse

100

10

1

0,1

5

10

20

100

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

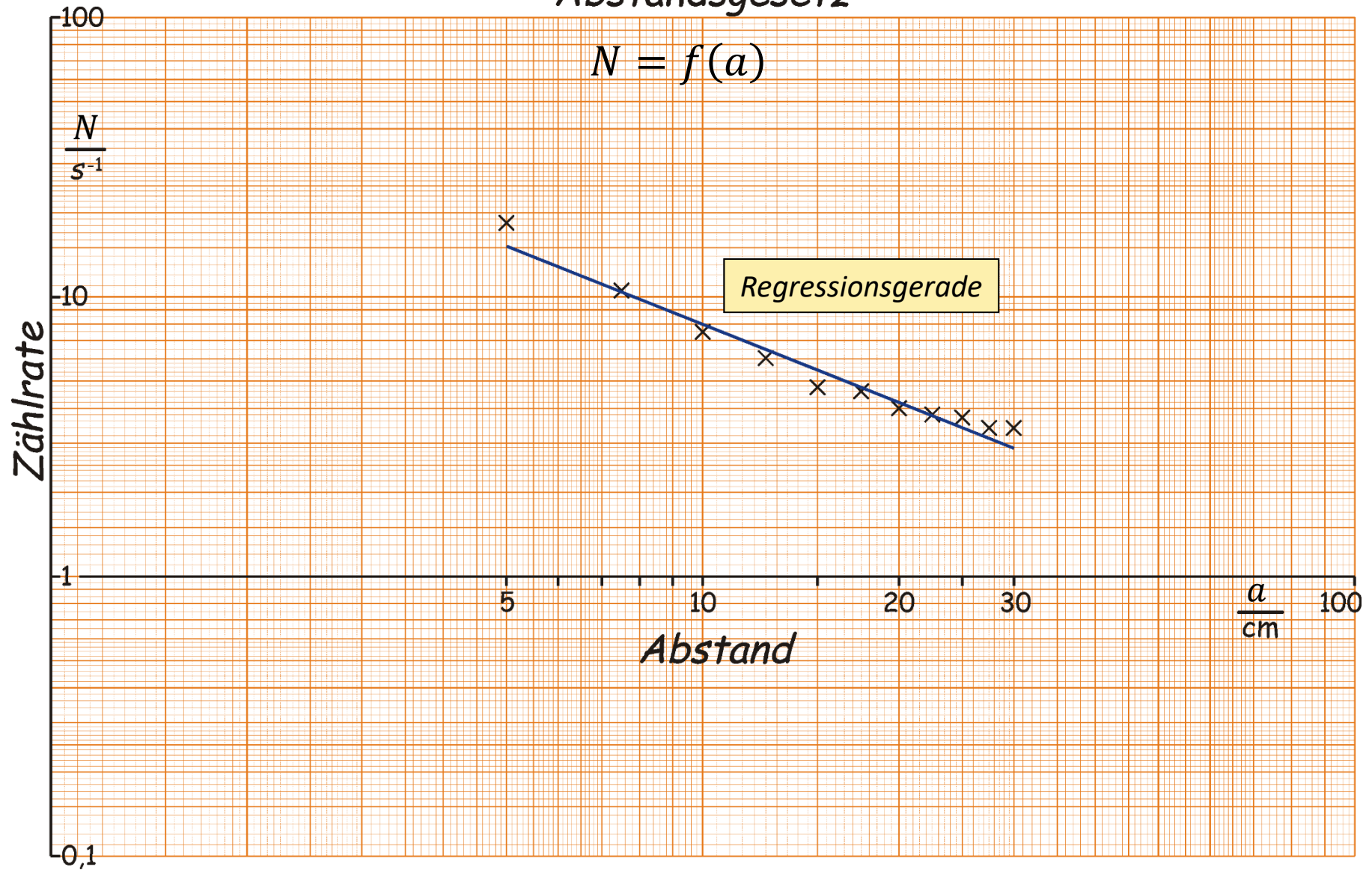
x

x

x

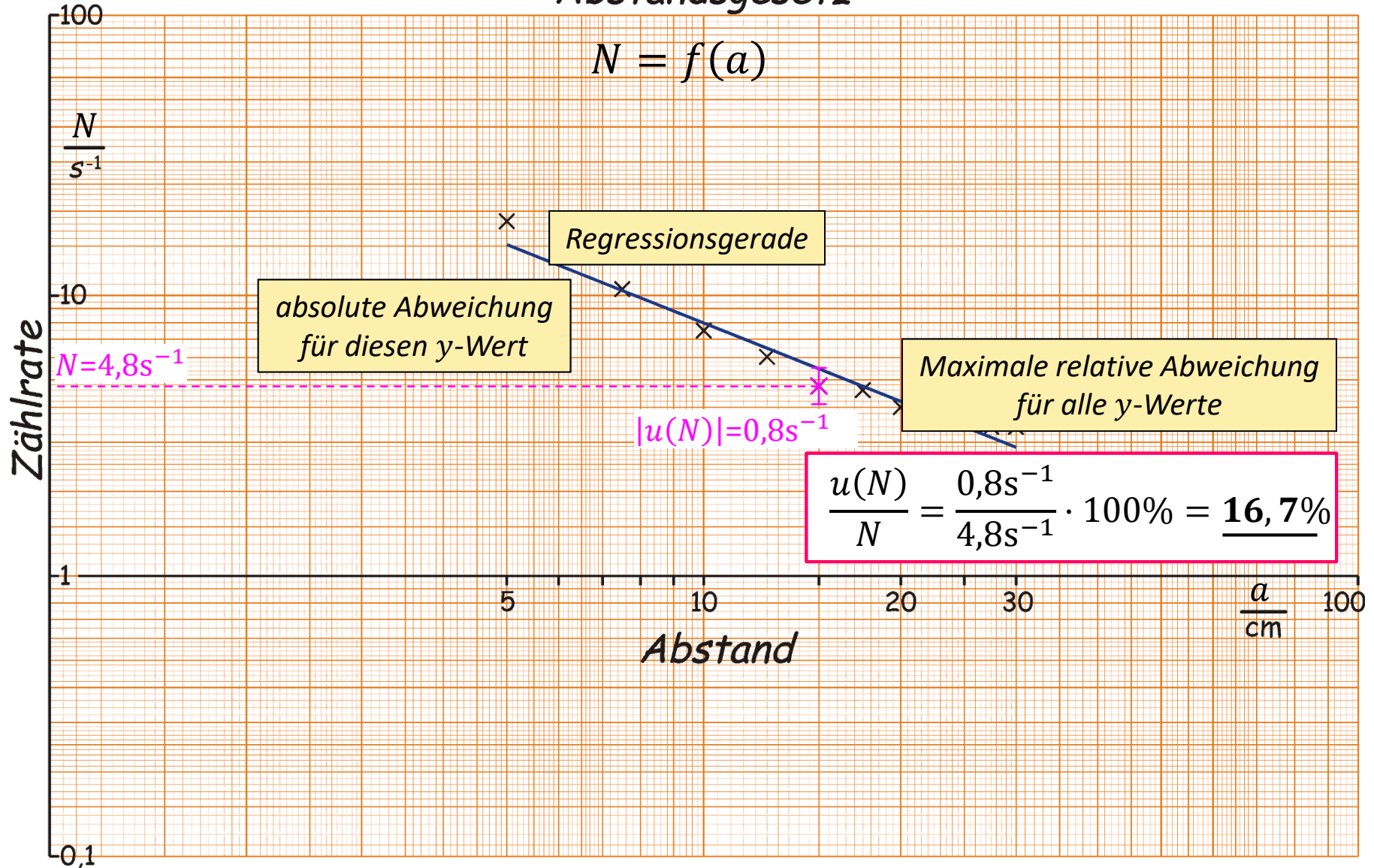
# Abstandsgesetz

$$N = f(a)$$



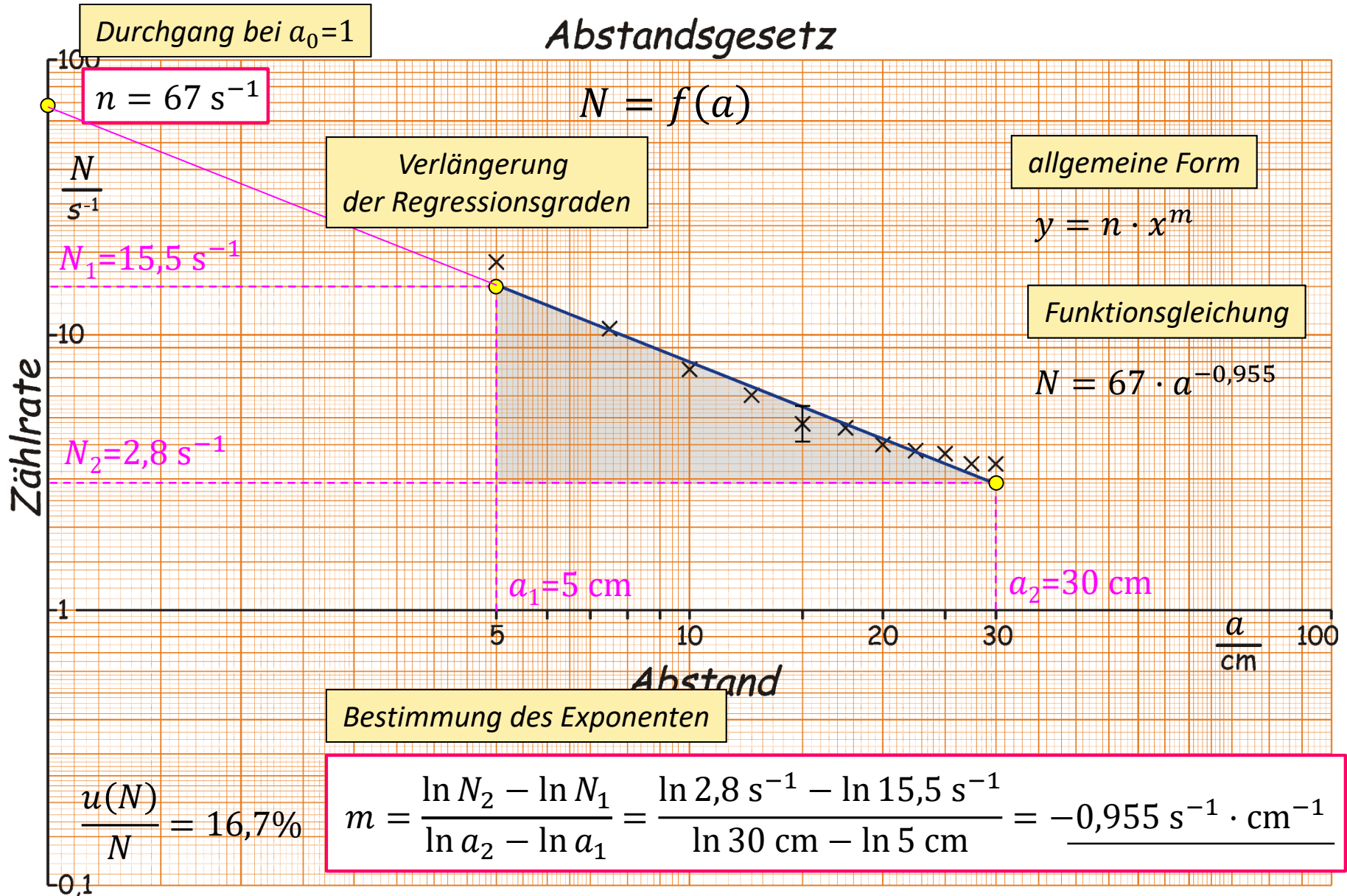
# Abstandsgesetz

$$N = f(a)$$





# Abstandsgesetz



# Auswertung vom Messdaten

## Lineare Regression

- Bestimmung durch eine Diagrammdarstellung
  - auf Millimeterpapier

---
  - auf halblogarithmischem Papier

---
  - auf doppeltlogarithmischem Papier

---
- **Bestimmung durch eine Berechnung**



# Lineare Regression

**Annahme:** lineare Abhängigkeit zweier Messgrößen  $x, y$

$$y = b \cdot x + a$$

Gesucht wird die Gerade, die sich den Messpunkten am besten nähert durch das **Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate** („Least Square Methode“)

**Varianz:**

$$V(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

**Covarianz:**

$$\text{Cov}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

$$\text{Cov}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

# Lineare Regression

**Beispiel:** Schuhgröße als Funktion der Körperlänge

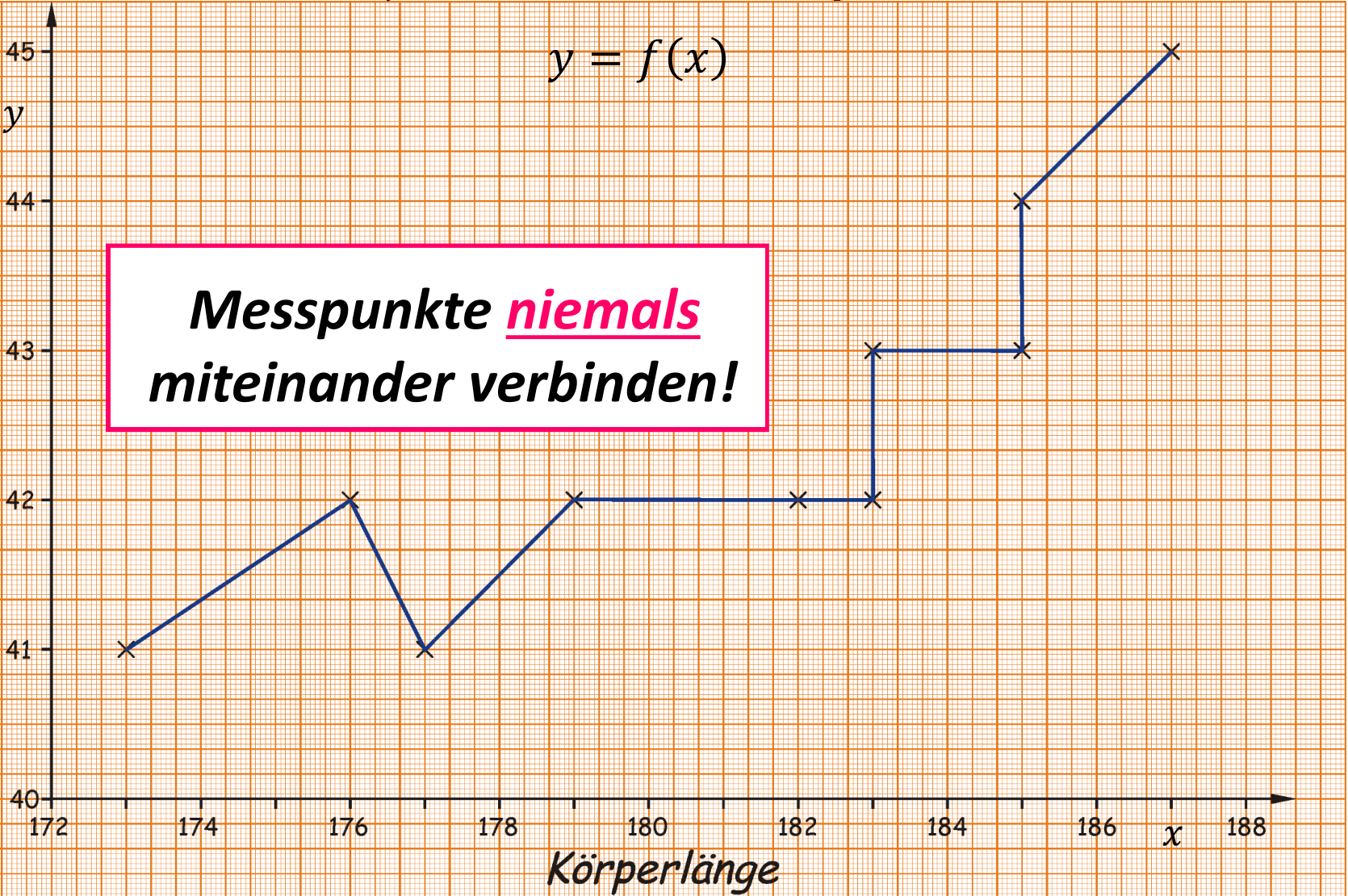
| $i$ | Körper-<br>größe<br>$x_i$ | Schuh-<br>größe<br>$y_i$ |
|-----|---------------------------|--------------------------|
| 1   | 183                       | 43                       |
| 2   | 185                       | 43                       |
| 3   | 176                       | 42                       |
| 4   | 183                       | 42                       |
| 5   | 177                       | 41                       |
| 6   | 187                       | 45                       |
| 7   | 179                       | 42                       |
| 8   | 182                       | 42                       |
| 9   | 185                       | 44                       |
| 10  | 173                       | 41                       |

## Beispiel für eine lineare Regression

$$y = f(x)$$

Schuhgröße

Messpunkte niemals  
miteinander verbinden!



Körperlänge

# Lineare Regression

**Beispiel:** Schuhgröße als Funktion der Körperlänge

|     | Körpergröße | Schuhgröße |         |         |                 |
|-----|-------------|------------|---------|---------|-----------------|
| $i$ | $x_i$       | $y_i$      | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ |
| 1   | 183         | 43         | 33489   | 1849    | 7869            |
| 2   | 185         | 43         | 34225   | 1849    | 7955            |
| 3   | 176         | 42         | 30976   | 1764    | 7392            |
| 4   | 183         | 42         | 33489   | 1764    | 7686            |
| 5   | 177         | 41         | 31329   | 1681    | 7257            |
| 6   | 187         | 45         | 34969   | 2025    | 8415            |
| 7   | 179         | 42         | 32041   | 1764    | 7518            |
| 8   | 182         | 42         | 33124   | 1764    | 7644            |
| 9   | 185         | 44         | 34225   | 1936    | 8140            |
| 10  | 173         | 41         | 29929   | 1681    | 7093            |
| MW  | 181,0       | 42,5       | 32779,6 | 1807,7  | 7696,9          |

$$y = 0,237 \cdot x - 0,397$$

allgemeine Form

$$y = b \cdot x + a$$

$$b = \frac{\text{Cov}(x)}{V(x)} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

$$\text{Cov}(x) = \overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$= 7696,9 - (181 \cdot 42,5) = 4,4$$

$$V(x) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

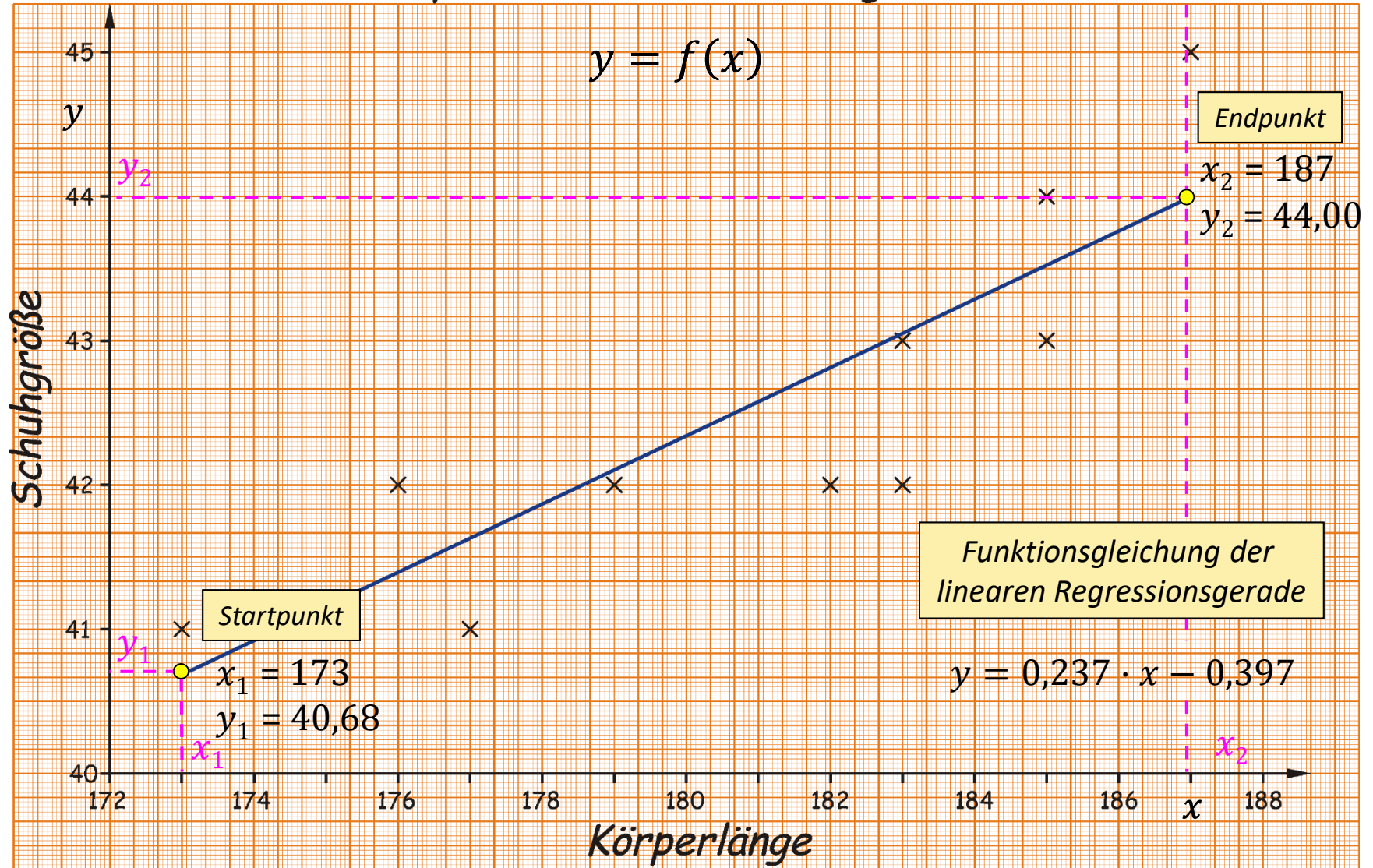
$$= 32779,6 - (181)^2 = 18,6$$

$$b = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{4,4}{18,6} = 0,237$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

$$= 42,5 - 0,237 \cdot 181 = -0,397$$

## Beispiel für eine lineare Regression





# Inhalt

## Teil 1

- Vorstellung des Praktikums
- Allgemeine Hinweise
- Protokollführung
- Ausgewählte Messverfahren

## Teil 2

- Messunsicherheiten
- Auswertung von Messdaten
- **Fehlerfortpflanzung**
- Ergebnisdarstellung



# Fehlerfortpflanzung

## Ziel:

- Abschätzung der Genauigkeit eines Messverfahrens

---

- Bei **einmaliger Messung** einer Größe

- Ermittlung des zufälligen Fehlers  
(z.B.: aus der Anzeige- und Ablesegenauigkeit des benutzten Messgerätes)

---

- Bei **Mehrfachmessung** einer Größe

- Spannweite-Verfahren

$$\Delta \bar{x} = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

- zweifache Standardabweichung

$$\Delta \bar{x} = 2s_{\bar{x}}$$

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

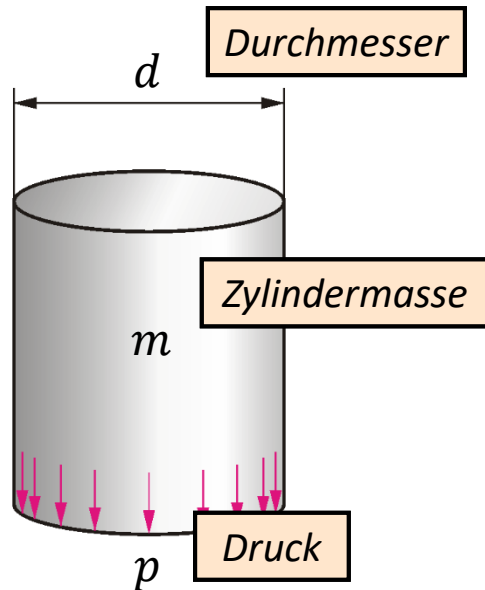
Bei *Potenzprodukten* von Messgrößen addieren sich die *relativen Abweichungen* .

$$Y = X_1^a \cdot X_2^b \cdot X_3^c \cdot \dots$$

$$\frac{u(Y)}{Y} = \left| a \cdot \frac{u(X_1)}{X_1} \right| + \left| b \cdot \frac{u(X_2)}{X_2} \right| + \left| c \cdot \frac{u(X_3)}{X_3} \right| + \dots$$

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

Bestimmung des Druckes  $p$ , den ein Zylinder auf seine Grundfläche ausübt



Ergebnisgröße

$$Y = p$$

Messgrößen

$$X_1 = m$$

$$X_2 = d$$

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

## Messunsicherheiten – Messschieber

- *Messwert*

$$m = 108,106 \text{ g}$$

$$d = 35,70 \text{ mm}$$

### Abweichungen der Messgewichte $u_S(m)$

|                             |                           |
|-----------------------------|---------------------------|
| 100 g $\Rightarrow$ 0,75 mg | 5 g $\Rightarrow$ 0,23 mg |
| 50 g $\Rightarrow$ 0,45 mg  | 2 g $\Rightarrow$ 0,15 mg |
| 20 g $\Rightarrow$ 0,30 mg  | 1 g $\Rightarrow$ 0,15 mg |
| 10 g $\Rightarrow$ 0,23 mg  |                           |

$$u(m) = u_Z(m) + u_S(m)$$

$$u(d) = u_Z(d) + u_S(d)$$

Fehlergrenzen

$$u(d) = 50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot d$$

- *Zufällige Messabweichung*

$$u_Z(m) = 1 \text{ mg}$$

$$u_Z(d) = 0,05 \text{ mm}$$

- *Systematische Messabweichung*

$$u_S(m) = 1,28 \text{ mg}$$

$$u_S(d) = 0,004 \text{ mm}$$

- *Gesamtmessunsicherheit*

$$u(m) = \pm 2,28 \text{ mg}$$

$$u(d) = \pm 0,054 \text{ mm}$$

$$u(m) = \pm 0,003 \text{ g}$$

$$u(d) = \pm 0,06 \text{ mm}$$

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

## Bildung des totalen Differentials

Ergebnisgröße

Messgrößen

$$Y = p$$

$$X_1 = m$$

$$X_2 = d$$

- Ausgangsgleichung

$$p = \frac{F}{A}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F &= m \cdot g \\ A &= \frac{1}{4}\pi \cdot d^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$p = \frac{m \cdot g}{\frac{1}{4}\pi \cdot d^2}$$

- angepasste  
Ausgangsgleichung

$$p(m, d) = \frac{4m \cdot g}{\pi \cdot d^2}$$

- Differentialgleichung

$$u(p) = \left| \frac{\partial p}{\partial m} \right| \cdot u(m) + \left| \frac{\partial p}{\partial d} \right| \cdot u(d)$$

- umgestellte  
Ausgangsgleichung

$$p(m) = \frac{4g}{\pi \cdot d^2} \cdot m$$

$$p(d) = \frac{4m \cdot g}{\pi} \cdot \frac{1}{d^2}$$

- mathematische  
Ersatzgleichung

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x \\ y' &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x^{-2} \\ y' &= a \cdot -2x^{-3} \end{aligned}$$

- Ableitung nach  $m, d$

$$\frac{\partial p}{\partial m} = \frac{4g}{\pi \cdot d^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial d} = \frac{4m \cdot g}{\pi} \cdot -2 \frac{1}{d^3}$$

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

- absolute Abweichung

$$u(p) = \left| \frac{4g}{\pi \cdot d^2} \right| \cdot u(m) + \left| \frac{4m \cdot g}{\pi} \cdot -2 \frac{1}{d^3} \right| \cdot u(d)$$

$$u(p) = \left| \frac{4g}{\pi \cdot d^2} \right| \cdot u(m) + 8 \left| \frac{m \cdot g}{\pi \cdot d^3} \right| \cdot u(d)$$

- relative Abweichung

$$\frac{u(p)}{p} = \frac{\left| \frac{\cancel{4}g}{\pi \cdot \cancel{d^2}} \right| \cdot u(m)}{\frac{\cancel{4}m \cdot \cancel{g}}{\pi \cdot \cancel{d^2}}} + \frac{\cancel{8}^2 \left| \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{g}}{\pi \cdot \cancel{d^3}} \right| \cdot u(d)}{\frac{\cancel{4}m \cdot \cancel{g}}{\pi \cdot \cancel{d^2}}}$$

$$\frac{u(p)}{p} = \left| \frac{u(m)}{m} \right| + 2 \left| \frac{u(d)}{d} \right|$$



# Maximale Unsicherheit mit totalem Differential

• *Messwert*

$$m = 108,106 \text{ g}$$

$$d = 35,70 \text{ mm}$$

• *Berechnung*

$$p = \frac{4m \cdot g}{\pi \cdot d^2} = \underline{1059,479 \text{ Pa}}$$

• *Messunsicherheiten*

$$u(m) = \pm 0,003 \text{ g}$$

$$u(d) = \pm 0,06 \text{ mm}$$

• *relative Abweichung*

$$\frac{u(p)}{p} = \left| \frac{u(m)}{m} \right| + 2 \left| \frac{u(d)}{d} \right|$$

$$\frac{u(p)}{p} = \left| \frac{0,003 \text{ g}}{108,106 \text{ g}} \right| + 2 \left| \frac{0,06 \text{ mm}}{35,70 \text{ mm}} \right| = \underline{0,339 \%}$$

• *absolute Abweichung*

$$u(p) = p \cdot \frac{u(p)}{p}$$

$$u(p) = 1059,479 \text{ Pa} \cdot 0,339 \% = \underline{3,591 \text{ Pa}}$$

• *Ergebnis*

$$p = (1059,48 \pm 3,59) \text{ Pa} \quad \frac{u(p)}{p} = 0,34\%$$

# Maximale Unsicherheit mit Min-Max-Methode

|                       |                                                                                              |                              |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| • Messwerte           | $m = 108,106 \text{ g}$                                                                      | $d = 35,70 \text{ mm}$       |
| • Messunsicherheit    | $u(m) = \pm 0,003 \text{ g}$                                                                 | $u(d) = \pm 0,06 \text{ mm}$ |
| • Maximalwerte        | $d_{max} = d + u(d)$<br>$m_{max} = 108,109 \text{ g}$                                        | $d_{max} = 35,76 \text{ mm}$ |
| • Minimalwerte        | $d_{min} = d - u(d)$<br>$m_{min} = 108,103 \text{ g}$                                        | $d_{min} = 35,64 \text{ mm}$ |
| • Werte für $p_{max}$ | $p_{max} = \frac{4m_{max} \cdot g}{\pi \cdot (d_{min})^2} = \underline{1063,079 \text{ Pa}}$ |                              |
| • Werte für $p_{min}$ | $p_{min} = \frac{4m_{min} \cdot g}{\pi \cdot (d_{max})^2} = \underline{1055,898 \text{ Pa}}$ |                              |
| • absolute Abweichung | $u(p) = \frac{p_{max} - p_{min}}{2} = \underline{3,591 \text{ Pa}}$                          |                              |
| • Ergebnis            | $p = (1059,48 \pm 3,59) \text{ Pa}$                                                          |                              |

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

Bei **Potenzprodukten** von Messgrößen addieren sich die **relativen Abweichungen** .

$$Y = X_1^a \cdot X_2^b \cdot X_3^c \cdot \dots$$

$$\frac{u(Y)}{Y} = \left| a \cdot \frac{u(X_1)}{X_1} \right| + \left| b \cdot \frac{u(X_2)}{X_2} \right| + \left| c \cdot \frac{u(X_3)}{X_3} \right| + \dots$$

Bei **Summen** von Messgrößen addieren sich die **Absoluten Abweichungen** .

$$Y = a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c \cdot X_3 + \dots$$

$$u(Y) = |a| \cdot u(X_1) + |b| \cdot u(X_2) + |c| \cdot u(X_3) + \dots$$

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

## Bestimmung der Wärmekapazität $K$ eines Kalorimeters

Massen

$$m_{Kal} = (711,0 \pm 0,2) \text{ g}$$

$$m_{Kal} + m_w = (927,5 \pm 0,2) \text{ g}$$

$$m_{Kal} + m_w + m_k = (1146,5 \pm 0,2) \text{ g}$$

Temperaturen

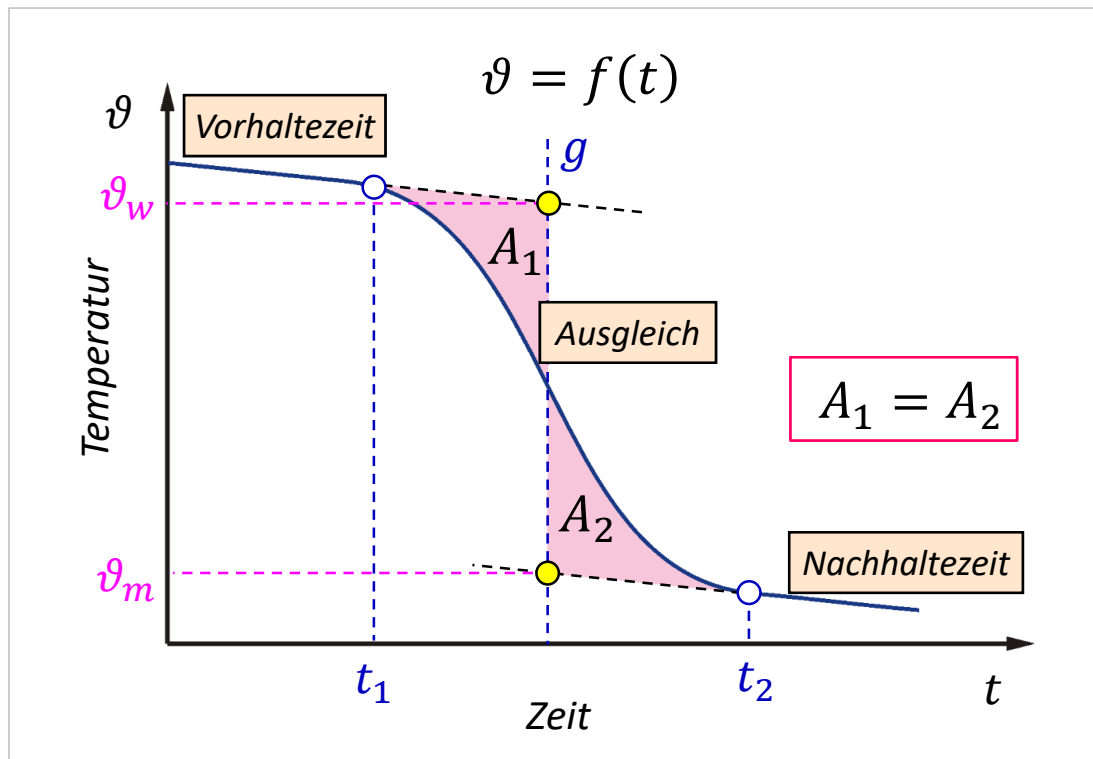
$$\vartheta_k = (22,9 \pm 0,1) ^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_w = (39,10 \pm 0,05) ^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_m = (31,40 \pm 0,05) ^\circ\text{C}$$

Konstante

$$c_w = 4,182 \text{ J/g}\cdot\text{K}$$



# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

## Bestimmung der Wärmekapazität $K$ eines Kalorimeters

Massen

$$m_{Kal} = (711,0 \pm 0,2) \text{ g}$$

$$m_{Kal} + m_w = (927,5 \pm 0,2) \text{ g}$$

$$m_{Kal} + m_w + m_k = (1146,5 \pm 0,2) \text{ g}$$

Temperaturen

$$\vartheta_k = (22,9 \pm 0,1) \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\vartheta_w = (39,10 \pm 0,05) \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\vartheta_m = (31,40 \pm 0,05) \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Konstante

$$c_w = 4,182 \text{ J/g}\cdot\text{K}$$

### Berechnung der Masse $m_w$ des warmen Wassers

$$m_w = (m_{kal} + m_w) - m_{kal} = 927,5 \text{ g} - 711,0 \text{ g} = \underline{216,5 \text{ g}}$$

**Abweichung  $u(m_w)$**

$$u(m_w) = u(m_{Kal} + m_w) + u(m_{Kal}) = 0,2 \text{ g} + 0,2 \text{ g} = \underline{0,4 \text{ g}}$$

$$m_w = (216,5 \pm 0,4) \text{ g}$$

### Berechnung der Masse $m_k$ des kalten Wassers

$$m_k = (m_{kal} + m_w + m_k) - (m_{kal} + m_w) = 1146,5 \text{ g} - 927,5 \text{ g} = \underline{219,0 \text{ g}}$$

**Abweichung  $u(m_k)$**

$$u(m_w) = u(m_{kal} + m_w + m_k) + u(m_{kal} + m_w) = 0,2 \text{ g} + 0,2 \text{ g} = \underline{0,4 \text{ g}}$$

$$m_w = (219,0 \pm 0,4) \text{ g}$$

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

## Bestimmung der Wärmekapazität $K$ eines Kalorimeters

|                                          |                                                                        |                                               |                                                                                                    |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $c_W = 4,182 \text{ J/g} \cdot \text{K}$ | $m_k = (219,0 \pm 0,4) \text{ g}$<br>$m_w = (216,5 \pm 0,4) \text{ g}$ | $\vartheta_k = (22,9 \pm 0,1) ^\circ\text{C}$ | $\vartheta_w = (39,10 \pm 0,05) ^\circ\text{C}$<br>$\vartheta_m = (31,40 \pm 0,05) ^\circ\text{C}$ |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Berechnung der Wärmekapazität $K$

$$K = c_W \cdot \left( m_k \cdot \frac{\vartheta_m - \vartheta_k}{\vartheta_w - \vartheta_m} - m_w \right)$$

$$K = 4,182 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot \left( 219,0 \text{ g} \cdot \frac{31,4 ^\circ\text{C} - 22,9 ^\circ\text{C}}{39,1 ^\circ\text{C} - 31,4 ^\circ\text{C}} - 216,5 \text{ g} \right)$$

$$K = 4,182 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot \left( 219,0 \cancel{\text{g}} \cdot \frac{8,5 \cancel{^\circ\text{C}}}{7,7 \cancel{^\circ\text{C}}} - 216,5 \cancel{\text{g}} \right)$$

$$K = \underline{105,6 \text{ J/K}}$$



# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

## Bestimmung der Wärmekapazität $K$ eines Kalorimeters

|                                        |                                   |                                                       |                                                         |
|----------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $c_W = 4,182 \text{ J/g}\cdot\text{K}$ | $m_k = (219,0 \pm 0,4) \text{ g}$ | $\vartheta_k = (22,9 \pm 0,1) \text{ }^\circ\text{C}$ | $\vartheta_w = (39,10 \pm 0,05) \text{ }^\circ\text{C}$ |
| $K = 105,6 \text{ J/K}$                | $m_w = (216,5 \pm 0,4) \text{ g}$ |                                                       | $\vartheta_m = (31,40 \pm 0,05) \text{ }^\circ\text{C}$ |

## Bestimmung der absoluten Abweichung $u(K)$

$$u(K) = \left| \frac{\partial K}{\partial m_k} \right| \cdot u(m_k) + \left| \frac{\partial K}{\partial m_w} \right| \cdot u(m_w) + \left| \frac{\partial K}{\partial \vartheta_k} \right| \cdot u(\vartheta_k) + \left| \frac{\partial K}{\partial \vartheta_w} \right| \cdot u(\vartheta_w) + \left| \frac{\partial K}{\partial \vartheta_m} \right| \cdot u(\vartheta_m)$$

Nebenrechnung

|                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u(K) = c_W \cdot \left( \left  \frac{\vartheta_m - \vartheta_k}{\vartheta_w - \vartheta_m} \right  \cdot u(m_k) \right.$ | $u_1 = \left  \frac{31,4 \text{ }^\circ\text{C} - 22,9 \text{ }^\circ\text{C}}{39,1 \text{ }^\circ\text{C} - 31,4 \text{ }^\circ\text{C}} \right  \cdot 0,4 \text{ g} = \underline{0,442 \text{ g}}$                                          |
| $+   -u(m_w)  $                                                                                                           | $u_2 =   -0,4 \text{ g}   = \underline{0,400 \text{ g}}$                                                                                                                                                                                      |
| $+ \left  -m_k \frac{1}{\vartheta_w - \vartheta_m} \right  \cdot u(\vartheta_k)$                                          | $u_3 = \left  -219,0 \text{ g} \cdot \frac{1}{39,1 \text{ }^\circ\text{C} - 31,4 \text{ }^\circ\text{C}} \right  \cdot 0,1 \text{ }^\circ\text{C} = \underline{2,844 \text{ g}}$                                                              |
| $+ \left  -m_k \frac{\vartheta_m - \vartheta_k}{(\vartheta_w - \vartheta_m)^2} \right  \cdot u(\vartheta_w)$              | $u_4 = \left  -219,0 \text{ g} \cdot \frac{31,4 \text{ }^\circ\text{C} - 22,9 \text{ }^\circ\text{C}}{(39,1 \text{ }^\circ\text{C} - 31,4 \text{ }^\circ\text{C})^2} \right  \cdot 0,05 \text{ }^\circ\text{C} = \underline{1,570 \text{ g}}$ |
| $+ \left  m_k \frac{\vartheta_w - \vartheta_k}{(\vartheta_w - \vartheta_m)^2} \right  \cdot u(\vartheta_m) \Bigg)$        | $u_5 = \left  219,0 \text{ g} \cdot \frac{39,1 \text{ }^\circ\text{C} - 22,9 \text{ }^\circ\text{C}}{(39,1 \text{ }^\circ\text{C} - 31,4 \text{ }^\circ\text{C})^2} \right  \cdot 0,05 \text{ }^\circ\text{C} = \underline{2,992 \text{ g}}$  |

# Fehlerfortpflanzung bei einmaliger Messung

## Bestimmung der Wärmekapazität $K$ eines Kalorimeters

*Zusammenfassung*

$$\sum u_{1\dots 5} = (0,442 + 0,400 + 2,844 + 1,570 + 2,992) \text{ g} = \underline{8,248 \text{ g}}$$

$$u(K) = c_W \cdot \sum u_{1\dots 5} = 4,182 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{g}} \cdot \text{K}} \cdot 8,248 \cancel{\text{g}} = \underline{34,5 \text{ J/K}}$$

*Ergebnis*

$$K = (105,6 \pm 34,5) \text{ J/K} \quad \frac{u(K)}{K} = 32,7\%$$

# Fehlerfortpflanzung

## Ziel:

- Abschätzung der Genauigkeit eines Messverfahrens
- Bei **einmaliger Messung** einer Größe
  - Ermittlung des zufälligen Fehlers  
(z.B.: aus der Anzeige- und Ablesegenauigkeit des benutzten Messgerätes)

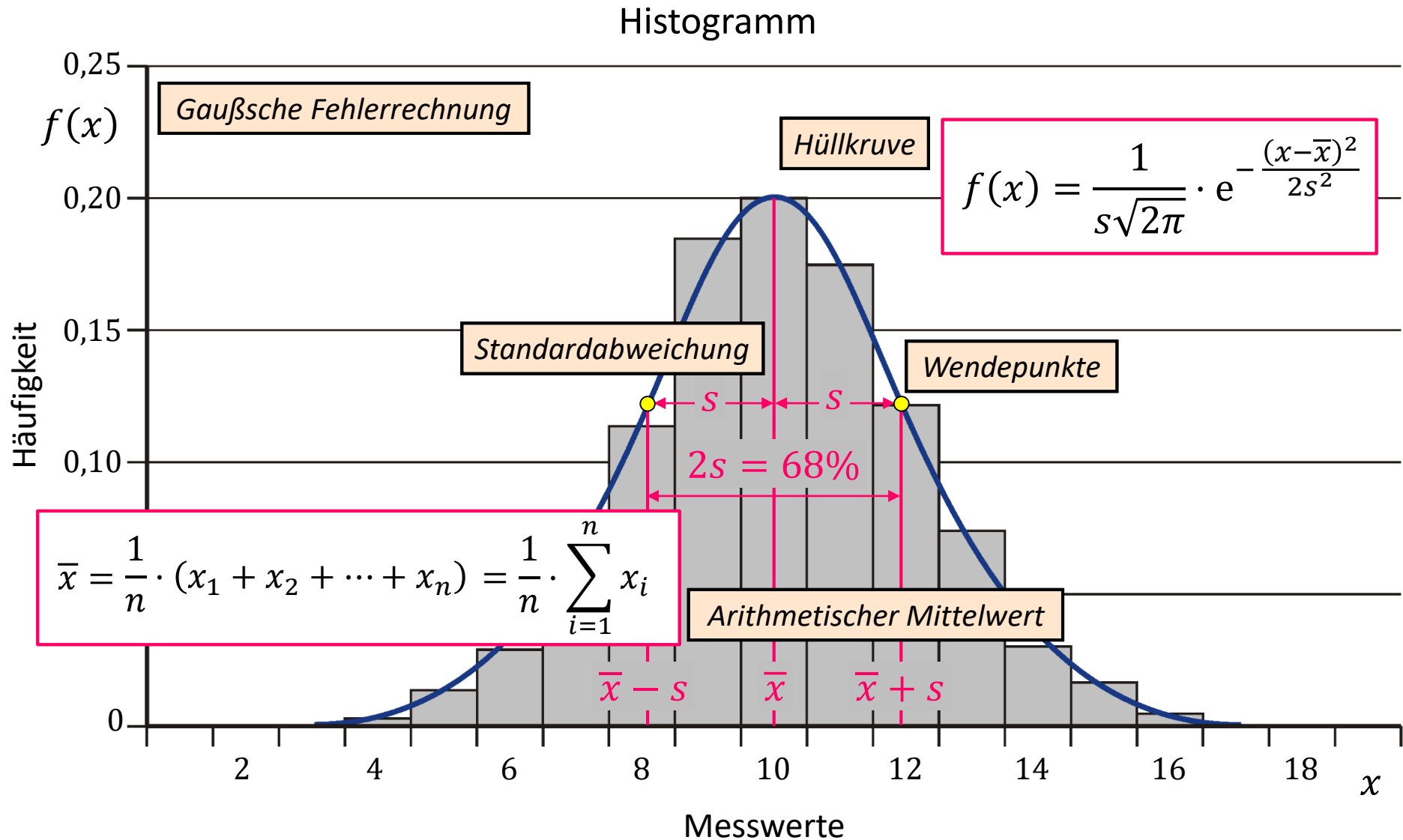
- Bei **Mehrfachmessung** einer Größe
  - Spannweite-Verfahren

$$\Delta \bar{x} = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

- zweifache Standardabweichung

$$\Delta \bar{x} = 2s_{\bar{x}}$$

# Fehlerfortpflanzung bei mehrmaliger Messung



# Fehlerfortpflanzung bei mehrmaliger Messung

## Gaußsche Fehlerrechnung (*Statistische Fehlertheorie*)

- Standardabweichung der Stichprobe

*hängt nur von der Qualität der Messapparaturen ab,  
jedoch nicht von der Anzahl der durchgeführten Messungen*

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

oder  $\sigma_{n-1}$

- Standardabweichung des Mittelwertes  
(*Stichprobenfehler*)

*einfache Standardabweichungen neigen dazu, die  
wahren Standardabweichung in ihrer Grundge-  
samtheit für kleine Stichproben zu unterschätzen*

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

oder  $\sigma_{n-1} / \sqrt{n}$

*z. B.: bei einer Stichprobengröße von  $n=2$  liegt  
die Unterschätzung bei etwa 25 %,  
für  $n=6$  dagegen nur noch 5 %*

# Fehlerfortpflanzung bei mehrmaliger Messung

- Für  $n \ll \infty$  wird  $s_{\bar{x}}$  mit dem *t-Faktor* (siehe Arbeitsunterlagen) multipliziert, um die gleiche oder eine höhere *statistische Sicherheit P* zu erreichen.

t-Werte (Student-t-Verteilung)

| $n \backslash P$ | 60%  | 70%  | 80%  | 90%  | 95%  | 99%  | 99,9% |
|------------------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 3                | 1,06 | 1,39 | 1,89 | 2,92 | 4,30 | 9,92 | 31,6  |
| 5                | 0,94 | 1,19 | 1,53 | 2,13 | 2,78 | 4,60 | 8,61  |
| 6                | 0,92 | 1,16 | 1,48 | 2,02 | 2,57 | 4,03 | 6,86  |
| 10               | 0,88 | 1,10 | 1,38 | 1,83 | 2,26 | 3,25 | 4,78  |
| 15               | 0,87 | 1,08 | 1,34 | 1,76 | 2,14 | 2,98 | 4,14  |
| $\infty$         | 0,84 | 1,04 | 1,28 | 1,64 | 1,96 | 2,58 | 3,29  |

Verwendung  
im Praktikum

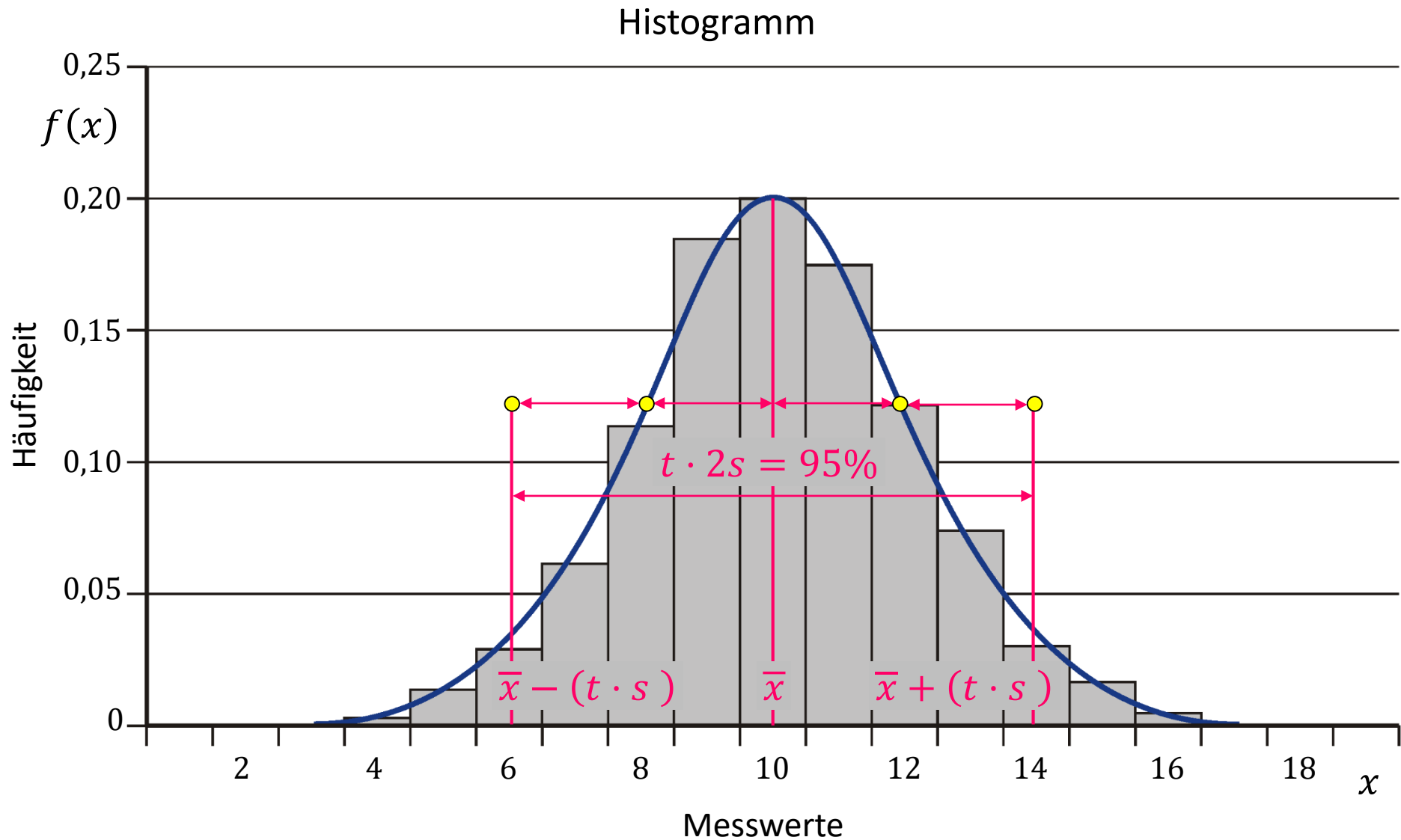
für unterschiedliche *statistische Sicherheiten P* und verschiedene *Stichprobenumfänge n*

Siehe Einführungsheft Seite 31

- Die **Messunsicherheit** wird mit  $t \cdot s_{\bar{x}}$  und der **Vertrauensbereich**  $\bar{x} \pm t \cdot s_{\bar{x}}$  berechnet.



# Fehlerfortpflanzung bei mehrmaliger Messung



# Fehlerfortpflanzung bei mehrmaliger Messung

## Bestimmung des Durchmessers $d$ , eines Metallstabes mittels Messschieber

| $n$ | $\frac{d}{\text{mm}}$ |
|-----|-----------------------|
| 1   | 5,15                  |
| 2   | 5,10                  |
| 3   | 5,30                  |
| 4   | 5,20                  |
| 5   | 5,15                  |
| 6   | 5,20                  |
| 7   | 5,25                  |
| 8   | 5,25                  |
| 9   | 5,20                  |
| 10  | 5,20                  |
| 11  | 5,10                  |
| 12  | 5,15                  |
| 13  | 5,20                  |
| 14  | 5,15                  |
| 15  | 5,25                  |
| 16  | 5,20                  |
| 17  | 5,15                  |
| 18  | 5,20                  |
| 19  | 5,05                  |
| 20  | 5,25                  |

- Mittelwert :

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n d_i = 5,185 \text{ mm}$$

- Standardabweichung des Mittelwertes :

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} = 0,01362 \text{ mm}$$

- Student –  $t$ -Verteilung :

$$\text{aus Tabelle} = 2,09$$

- Zufällige Messunsicherheit :

$$u_z(d) = t \cdot s_{\bar{d}} = 0,02847 \text{ mm}$$

- Systematische Messunsicherheit :  
(Messschieber)

$$u_s(d) = 10^{-4} \cdot \bar{d} = 0,00052 \text{ mm}$$

$$\begin{array}{l} \text{Genauigkeitsklasse II} \\ u(d) = 50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot \bar{d} \end{array}$$

- Gesamtmessunsicherheit :

$$u(d) = u_z(d) + u_s(d) = 0,02899 \text{ mm}$$

- Ergebnis:

$$d = (5,19 \pm 0,03) \text{ mm}$$

# Fehlerfortpflanzung bei mehrmaliger Messung

Bestimmung des Durchmessers  $d$ , eines Metallstabes mittels Messschieber

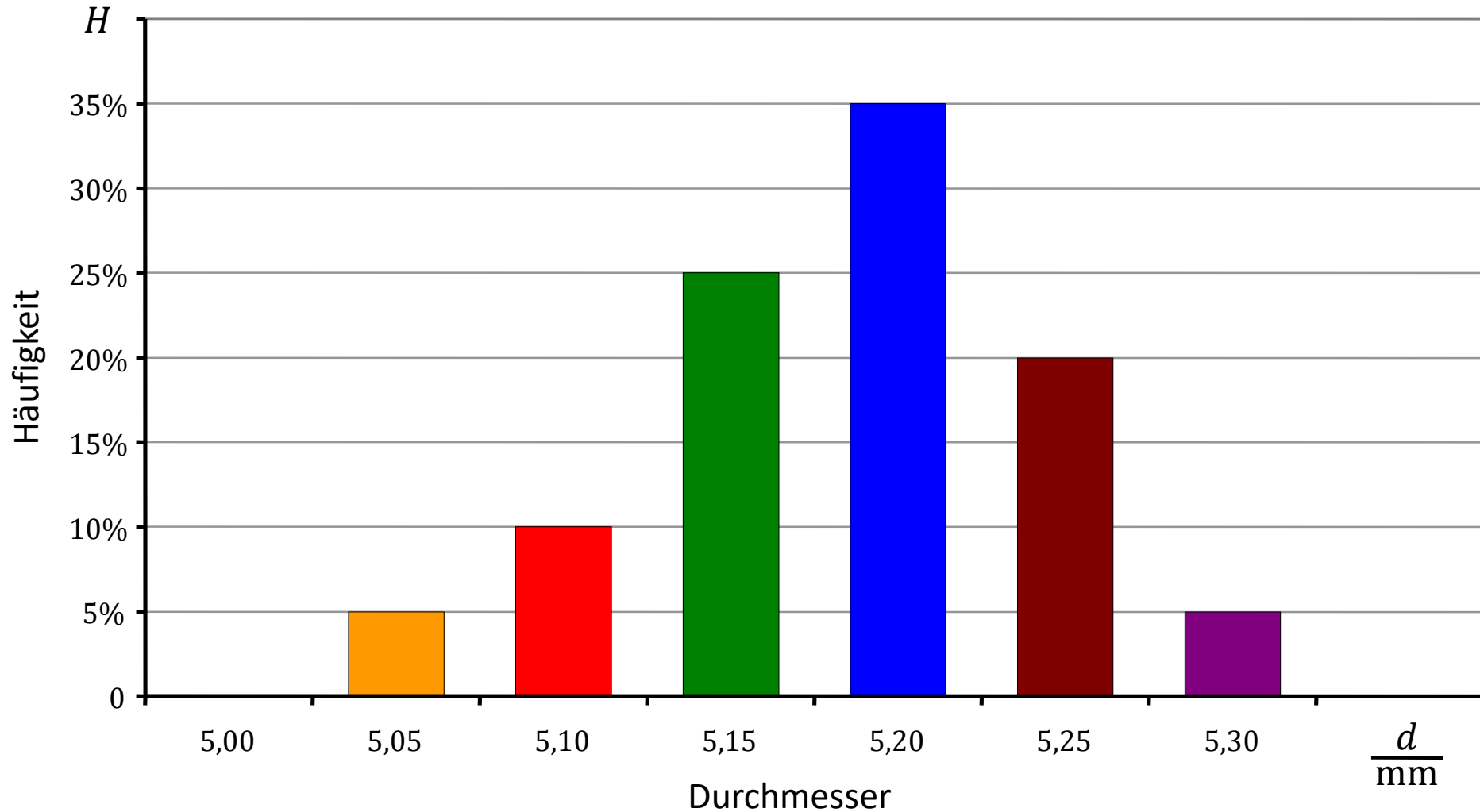
| $n$ | $\frac{d}{\text{mm}}$ |
|-----|-----------------------|
| 1   | 5,15                  |
| 2   | 5,10                  |
| 3   | 5,30                  |
| 4   | 5,20                  |
| 5   | 5,15                  |
| 6   | 5,20                  |
| 7   | 5,25                  |
| 8   | 5,25                  |
| 9   | 5,20                  |
| 10  | 5,20                  |
| 11  | 5,10                  |
| 12  | 5,15                  |
| 13  | 5,20                  |
| 14  | 5,15                  |
| 15  | 5,25                  |
| 16  | 5,20                  |
| 17  | 5,15                  |
| 18  | 5,20                  |
| 19  | 5,05                  |
| 20  | 5,25                  |

Häufigkeitsverteilung  $H$   
mit einer Schrittweite von 0,05 mm

| $\frac{d}{\text{mm}}$ | $H$ |     |
|-----------------------|-----|-----|
| 5,00                  | 0   | 0%  |
| 5,05                  | 1   | 5%  |
| 5,10                  | 2   | 10% |
| 5,15                  | 5   | 25% |
| 5,20                  | 7   | 35% |
| 5,25                  | 4   | 20% |
| 5,30                  | 1   | 5%  |
| 5,35                  | 0   | 0%  |

# Fehlerfortpflanzung bei mehrmaliger Messung

Häufigkeitsverteilung (*Histogramm*)





# Inhalt

## Teil 1

- Vorstellung des Praktikums
- Allgemeine Hinweise
- Protokollführung
- Ausgewählte Messverfahren

## Teil 2

- Messunsicherheiten
- Auswertung von Messdaten
- Fehlerfortpflanzung
- **Ergebnisdarstellung**

# Ergebnisdarstellung

$$E = (x \pm u(x)) \cdot \text{Potenz und Einheit}$$

- Messergebnisse und deren Messunsicherheiten werden im Normalfall auf höchstens ***zwei signifikante Ziffern*** angegeben.

---

- Messergebnisse und Messunsicherheiten sollten dabei die gleiche Dimension haben, d. h. die Messunsicherheiten können ***nicht genauer*** sein als die Messergebnisse.

---

- Das berechnete Ergebnis kann ebenfalls ***niemals genauer*** sein als die Messergebnisse, aus denen es bestimmt wurde.

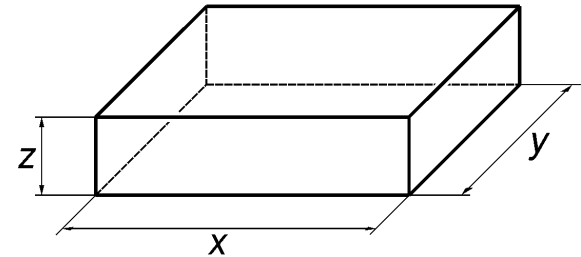
# Ergebnisdarstellung

## Beispiel 1: Bestimmung der Dichte eines quaderförmigen Körpers

Bestimmungsgleichung

$$\rho = \frac{m}{V} \quad V = x \cdot y \cdot z$$

$$\rho = \frac{m}{x \cdot y \cdot z}$$



gemessene Größen mit  
absoluter und relativer  
Messunsicherheit

$$m = (40,0 \pm 0,1) \text{ g}$$

$$u(m)/m = 0,25\%$$

$$x = (39,60 \pm 0,05) \text{ mm}$$

$$u(x)/x = 0,13\%$$

$$y = (38,20 \pm 0,05) \text{ mm}$$

$$u(y)/y = 0,13\%$$

$$z = (10,00 \pm 0,05) \text{ mm}$$

$$u(z)/z = 0,50\%$$

Ergebnis mit relativer  
Messunsicherheit

$$\rho = 2,64424348 \text{ g/cm}^3$$

$$u(\rho)/\rho = 1,01\%$$

absolute  
Messunsicherheit

$$u(\rho) = \rho \cdot \left( \frac{u(\rho)}{\rho} \right)$$

$$u(\rho) = 0,02663157 \text{ g/cm}^3$$

Ergebnis

$$\rho = (2,64 \pm 0,03) \text{ g/cm}^3$$



# Ergebnisdarstellung

## Beispiel 2: Bestimmung des Massenträgheitsmomentes eines langen dünnen Stabes

Bestimmungsgleichung

$$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

gemessene Größen mit  
absoluter und relativer  
Messunsicherheit

$$l = (450 \pm 0,5) \text{ mm}$$

$$u(l)/l = 0,11\%$$

× 2

$$m = (99,8 \pm 0,1) \text{ g}$$

$$u(m)/m = 0,10\%$$

Ergebnis mit relativer  
Messunsicherheit

$$J = 0,001684125 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$u(J)/J = 0,32\%$$

absolute  
Messunsicherheit

$$u(J) = J \cdot \left( \frac{u(J)}{J} \right)$$

$$u(J) = 5,3892\text{E-}06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$u(J) = 0,0000053892 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ergebnis

$$J = (1,68 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



## Zusammenfassung

- Versuchsvorbereitung (*Planung, Organisation, Vorbetrachtungen*), Versuchsdurchführung (*sauberes, zügiges und konzentriertes Arbeiten*) sowie Auswertung der physikalischen Experimente.

---

- Messen (*mit analogen und digitalen Messverfahren*) einschließlich der Handhabung von verschiedenen Messgeräten.

---

- Anwenden graphischer und mathematischer Verfahren beim Lösen physikalisch-technischer Aufgaben und der Auswertung von Messungen.

---

- Verwendung von wissenschaftlicher Literatur (*auch Handbücher, Tabellen usw.*)



Danke für Ihre  
Aufmerksamkeit!