

Einführung

in das Physikalische Praktikum

8. Auflage

Philipp · Berger · Wolf



Einführung

in das Physikalische Praktikum

8. überarbeitete Auflage

Dipl.-Phys. Norbert Philipp
Dipl.-Ing. (FH) Ingo Berger
Dr. rer. nat. Bodo Wolf

Mit Unterstützung von Shadi Sykora, M. Eng. • Alexander Böhm, M. Sc. • Jörg Nitschke, M. Sc.

B-TU

Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg
Standort: Senftenberg

Universitätsplatz 1
01968 Senftenberg

8. überarbeitete Auflage
2021

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Ablauf des Physikalischen Praktikums	5
2.1 Allgemeine Hinweise	5
2.2 Versuchsvorbereitung	6
2.3 Versuchsdurchführung	6
2.4 Versuchsauswertung	7
3. Ausgewählte Messverfahren	8
3.1 Längenmessung	8
3.1.1 Messschieber	8
3.1.2 Bügelmessschraube	9
3.2 Massenbestimmung durch Wägung	10
3.2.1 Wägeprinzipien	10
3.2.2 Messtechnische Begriffe und Eigenschaften von Waagen	10
3.3 Kalorimetrische Messungen	11
3.4 Elektrische Messgeräte	15
3.4.1 Analoge Zeigerinstrumente	15
3.4.2 Digitalmultimeter	16
3.5 Elektronenstrahloszilloskop	17
3.5.1 Funktionelle Zusammenhänge	17
3.5.2 Zweikanaloszilloskop	18
3.5.3 Triggerung	18
3.5.4 Frequenz- und Spannungsmessung mit dem Oszilloskop	19
4. Auswertung von Beobachtungen	20
4.1 Abschätzung der Genauigkeit von Messungen	20
4.1.1 Maximale Messunsicherheit bei Einzelmessung	21
4.1.2 Maximale Messunsicherheit bei indirekter Messung	22
4.1.3 Messunsicherheit einer Messwertfolge	27
4.1.4 Messunsicherheit einer Folge bei indirekter Messung	30
4.1.5 Vertrauensbereiche	31
4.2 Angabe der Messergebnisse	32
4.3 Ausgleich indirekter Messung (<i>lineare Regression</i>)	35
4.4 Das gewichtete Mittel	39
4.5 Zählstatistik	40
4.5.1 Zählstatistik seltener Ereignisse	40
4.5.2 Die Normalverteilung	41
4.5.3 Betrachtungen zur Messunsicherheit	42
4.6 Graphische Darstellung	43
4.6.1 Lineare Zusammenhänge der Form $y = a + b \cdot x$	44
4.6.2 Nichtlineare Zusammenhänge der Form $y = a \cdot x^b$	46
4.6.3 Nichtlineare Zusammenhänge der Form $y = a \cdot e^{b \cdot x}$	47
4.6.4 Histogramm	49
4.6.5 Wahrscheinlichkeitsdiagramm	49
4.6.6 Darstellung von Winkelabhängigkeiten	50

5. Verhalten im Labor	51
5.1 Allgemeines Verhalten	51
5.2 Gesundheits- Arbeits- und Brandschutz	51
5.2.1 Feuer- und explosionsgefährliche Stoffe	51
5.2.2 Gesundheitsgefährdende Stoffe	52
5.2.3 Druck- und Vakuumgefäße	53
5.2.4 Kältemischung und verflüssigte Gase	53
5.2.5 Elektrische Anlagen	53
5.2.6 Ionisierende Strahlung	54
5.2.7 Laser	54
5.2.8 Sonstige Bestimmungen	54
6. Garantie- und Eichfehlergrenzen von Messgeräten nach Herstellerangaben	55
7. Musterprotokoll	58
Deckblatt	58
Versuchsanleitung	59
Messwertprotokoll	64
Auswertung und Diagramme	65
8. Literaturhinweise	76
 Beispiele:	
3.1 Bestimmung der Wärmekapazität eines Kalorimeters	13
3.2 Ableseberechnung aus Bild 3.14	19
4.1 Längenmessung	22
4.2 Messung eines elektrischen Widerstandes	24
4.3 Messung der Brennweite einer dünnen Linse	25
4.4 Mittlere Schwingungsdauer \bar{T} eines mathematischen Pendels	33
4.5 Brennweite einer dünnen Linse	33
4.6 Bestimmung des Direktionsmomentes	37
4.7 Gewichteter Mittelwert	39
4.8 Doppeltlogarithmische Darstellung	46
4.9 Halblogarithmische Darstellung	47
4.10 Nutzung von Wahrscheinlichkeitspapier	49

1. Einleitung

Sowohl im Praktikum als auch im Forschungslabor muss der Ablauf eines naturwissenschaftlichen Experimentes stets in Form eines Versuchsprotokolls niedergeschrieben werden. Das ermöglicht einem selbst oder einem fachkundigen Leser auch nach Beendigung des Experimentes, den Versuchsverlauf zu rekonstruieren und zu überprüfen, sowie eventuelle Fehler zu finden.

Durch ein einheitliches, sauberes und nachvollziehbares Versuchsprotokoll ist es möglich, auf die Ergebnisse des Experimentes aufzubauen oder diese als Basis für weitere Versuche zu nutzen. Dieses Vorgehen stellt eine wesentliche Grundlage sowohl bei wissenschaftlichen als auch bei ingenieurtechnischen Fragestellungen dar.

Das bewusst anwendungsorientiert aufgebaute Physikalische Praktikum vertieft und ergänzt die in den Lehrveranstaltungen und im Selbststudium erworbenen Kenntnisse im Lehrgebiet Physik. Die Versuchsinhalte sind grundlegende Beispiele aus allen Teilgebieten der Physik. Neben der nachhaltigen Darstellung der Wechselverhältnisse zwischen Naturwissenschaft und Technik werden im Physikalischen Praktikum Fertigkeiten erworben, wie z.B.:

- teamorientierte Vorbereitung (*Planung, Organisation, Aufbau*), Durchführung und Auswertung der physikalischen Experimente,
- Messen (*mit analogen und digitalen Messverfahren*) einschließlich der Handhabung von Messgeräten und Gebrauch physikalisch-technischer Einheiten,
- Anwenden graphischer und mathematischer Verfahren beim Lösen physikalisch-technischer Aufgaben und der Auswertung von Messungen sowie
- Arbeit mit wissenschaftlicher Literatur (*auch Handbücher, Tabellen u. ä.*).

Im Praktikum werden weitgehend labortypische Geräte mit zunehmendem Automatisierungsgrad eingesetzt. Dadurch werden die Studierenden in die Lage versetzt, sich mit ihren Anwendungen vertraut zu machen und in der begrenzten Praktikumszeit eine hinreichend große Anzahl experimenteller Ergebnisse zu gewinnen.

2. Ablauf des Praktikums

2.1 Allgemeine Hinweise

Die Versuche werden in **Zweiergruppen** durchgeführt. Die Versuchsfolge bzw. die Termine der Versuchsdurchführung werden für jede Versuchsgruppe durch Aushang oder durch das Laborpersonal bekannt gegeben.

Es werden sechs Versuche pro Semester durchgeführt. Alle geforderten Versuche müssen vor Ablauf der Prüfungszeit abgeschlossen sein. Ist dies nicht der Fall, müssen in den entsprechenden Folgesemestern Ersatzversuche nach Absprache durchgeführt werden.

Jeder Studierende erhält eine Testatkarte. Diese dient zum Nachweis des ordnungsgemäß durchgeführten Physikalischen Praktikums und wird dem Studierenden nach erfolgreichem Abschluss des gesamten Versuchsprogramms ausgehändigt.

Jede Versuchsgruppe bekommt zu Beginn des Praktikums einen Protokollhefter vom Laborpersonal zugewiesen. In diesem Hefter werden neben den Testatkarten auch die abgegebenen vollständigen Protokolle abgelegt. Dieser Hefter bleibt aus Gründen der Kontrolle und der Durchsicht bis zur Beendigung des gesamten Versuchsprogramms im Physik-Labor und wird nach erfolgreichem Abschluss des gesamten Versuchsprogramms der Versuchsgruppe ausgehändigt.

2.2 Versuchsvorbereitung

Die Studierenden haben die Pflicht, die **erste** Versuchsanleitung des Semesters vom Laborpersonal des Physikalischen Praktikums (*Laborraum 4.244*) mindestens **eine Woche** vor Versuchsbeginn abzuholen. Zu jedem Versuch wird dann die Versuchsanleitung für den Folgeversuch an jede Versuchsgruppe ausgegeben (*Vorbereitungszeit 2 Wochen*).

Diese Versuchsanleitung enthält neben der Aufgabenstellung, die theoretischen Grundlagen in Kurzform, die Auflistung der benötigten Versuchsgерäte, Fragen zur Versuchsvorbetrachtung und Hinweise zur Versuchsdurchführung sowie Aufgaben bzw. Hilfestellungen zur Versuchsauswertung.

Die Versuchsanleitung ist vor jedem Versuch durchzuarbeiten, die Fragen der Vorbetrachtung zu beantworten und ein Ablaufplan bzw. ein Entwurf für ein Messwertprotokoll anzufertigen. Literaturhinweise für das notwendige Selbststudium finden Sie im **Abschnitt 8** („Einführung in das Physikalische Praktikum“).

Zum Praktikumstag sind Hilfsmittel für das Zeichnen und Rechnen sowie für den Versuch benötigte Zeichen- und Funktionspapiere mitzubringen. Das gilt auch für die zu beantworteten Fragen der Vorbetrachtung sowie der vorbereitete Ablaufplan bzw. der Entwurf des Messwertprotokolls.

Sind bei der Vorbereitung auf den Versuch einige Probleme unklar geblieben, so haben die Versuchsgruppen die Pflicht, sich vor Beginn des Praktikums den betreffenden Versuchsstand anzuschauen sowie die Probleme mit den Betreuern des Physiklabors zu klären.

2.3 Versuchsdurchführung

Vor der Durchführung des Versuches haben sich die Studierenden von der Vollständigkeit der Arbeits- und Hilfsmittel zu überzeugen. Dabei ist zu kontrollieren, ob defekte Arbeits- oder Hilfsmittel am Versuchsstand vorhanden sind. Für selbst verschuldete oder nicht gemeldete Schäden haftet der Studierende. Sind eigenständig mechanische oder elektrische Versuchsaufbauten notwendig, ist vor deren Inbetriebnahme der Betreuer zu informieren.

Die Durchführung des Laborversuches erfolgt entsprechend der Versuchsanleitung!

Durch den Betreuer kann bei Versuchsbeginn bzw. während des Versuchs eine Kontrolle der Vorbereitung erfolgen. Dazu werden über die geforderte Versuchsvorbetrachtung, den Stand des Selbststudiums sowie die Ausführung des Messwertprotokolls Kolloquien (*kurze Prüfungsgespräche*) am Versuchstag durchgeführt.

Der Versuchstisch ist nach Versuchsende so zu verlassen, wie er vorgefunden wurde!

Neue Termine können nach Vereinbarung mit dem Laborpersonal **zeitnah** wie folgt vergeben werden:

- aus Krankheitsgründen eines Versuchspartners (*Krankenschein vorlegen*)
- bei entschuldigter Verspätung (*mehr als 15 Minuten*)
- bei Überschreitung der Versuchsdauer (*mehr als 15 Minuten*)
- durch mangelhafte Versuchsvorbereitung (*keine Vorbetrachtung, kein Messwertprotokoll*)
- bei Versuchsabbruch durch einen unverschuldeten technischen Defekt
- bei Überschreitung des Abgabetermins (*gilt auch bei Korrekturen*)
- nach dem dritten Korrekturversuch des Protokolls

Bei unentschuldigtem Fehlen bzw. bei Betrugsversuchen werden Termine vom Laborpersonal nach dem regulären Praktikum vergeben. Im Wiederholungsfall können auch Versuchsgruppen vom Physikalischen Praktikum ausgeschlossen werden. Eine Wiederholung des Praktikums ist dann erst im übernächsten Semester möglich (*nach ca. 1 Jahr*).

2.4 Versuchsauswertung

Jede Versuchsgruppe gibt nach **einer Woche** eine dokumentarische Zusammenstellung des Versuchs in **handschriftlicher**, **sauberer** und **übersichtlicher** Form mit einem Heftstreifen (Aktendulli) zusammengeheftet ab. Das Protokoll soll alles enthalten, was notwendig ist, um den Lösungsweg der Aufgaben vollständig rekonstruieren oder wiederholen zu können und um die Messergebnisse weiter zu verwenden (*Musterprotokoll, siehe S. 58*).

Das Protokoll ist übersichtlich zu gliedern und soll folgende Bestandteile enthalten.

a) Deckblatt

Das Deckblatt finden Sie auf der Homepage des Physiklabors. Es ist vollständig auszufüllen. (<https://www.b-tu.de/ag-experimentalphysik/lehre/physikalisches-praktikum>)

b) Versuchsanleitung

Die Versuchsanleitung ist nach dem Deckblatt einzuheften und dient als theoretische Grundlage, Aufgabenstellung, Versuchsaufbau und Quelle benötigter Formeln.

c) Messwertprotokoll

Das beglaubigte Messwertprotokoll ist hinter die Versuchsanleitung zu heften und dient als Bezugsquelle bzw. als Datenbasis für die Ausarbeitung des Protokolls.

Das Messwertprotokoll beinhaltet die Planung des Versuchsablaufs und enthält neben der Festlegung der notwendigen Messungen auch die Untergliederung in einzelne Teilaufgaben und deren Darstellungsmöglichkeit.

Ein vorbereitetes Messwertprotokoll ist zum Versuchsbeginn vorzulegen. In ihm werden die während des Experiments primär gemessenen physikalischen Größen (*mit Einheiten*) einschließlich der ermittelten oder eingeschätzten Messabweichungen eingetragen.

Die Versuchsdurchführung muss auf dem Messwertprotokoll vom Laborpersonal bestätigt werden.

d) Aufgaben und Berechnungen

Die Aufgaben und Berechnungen sind auf einem Extrablatt (*kariert*) klar strukturiert, sorgfältig und nachvollziehbar darzulegen (*siehe S. 65*).

Hierbei wird auf die äußere Form größten Wert gelegt („Gegeben“, „Gesucht“, ggf. Skizzen, „Lösungen“). Fehlerrechnungen müssen auch als solche erkennbar sein. Die maximale Messunsicherheit, resultierend aus systematischen und zufälligen Abweichungen der Messungen bzw. der Teilergebnisse, gehört zur Angabe jedes Messergebnisses. Ergebnisse sind dabei zweimal zu unterstreichen bzw. als Ergebnis kenntlich zu machen.

e) Graphische Darstellungen

Graphische Darstellungen sind per Hand auf Millimeter- oder anderen Funktionspapieren anzufertigen und nur auf einem Blatt darzustellen. Hierbei ist auf die richtigen Skalenbeschriftungen, Skalierungen, Funktionsbeschreibungen, Verwendung von Einheiten, Regressionsgeraden und Bestimmungen der Anstiege sowie deren Messunsicherheiten zu achten.

Je nach Aufgabenstellung kann die Berechnung der Endergebnisse unter Verwendung der graphischen Darstellungen erfolgen.

f) Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Die in der Aufgabenstellung geforderten Resultate sind unter Beachtung der berechneten maximalen Messunsicherheiten darzustellen und eine kritische Diskussion der Ergebnisse durchzuführen. Dabei sind Übereinstimmungen mit den theoretisch vorhergesagten Zusammenhängen, Vergleiche mit bekannten Material- oder Naturkonstanten und mögliche Ursachen für Abweichungen davon bzw. ein Vergleich verschiedener Messverfahren vorzunehmen sowie der Anteil der Messunsicherheiten von Teilergebnissen an der ermittelten Messunsicherheit des Endergebnisses zu bestimmen.

3. Ausgewählte Messverfahren

3.1 Längenmessung

3.1.1 Messschieber

Mit Hilfe eines Messschiebers (**Bild 3.1**) lassen sich Außen-, Innen- sowie Tiefenmaße mit einer Genauigkeit von mindestens $\pm 0,1\text{mm}$ auf einfache Art und Weise bestimmen (siehe S. 55).

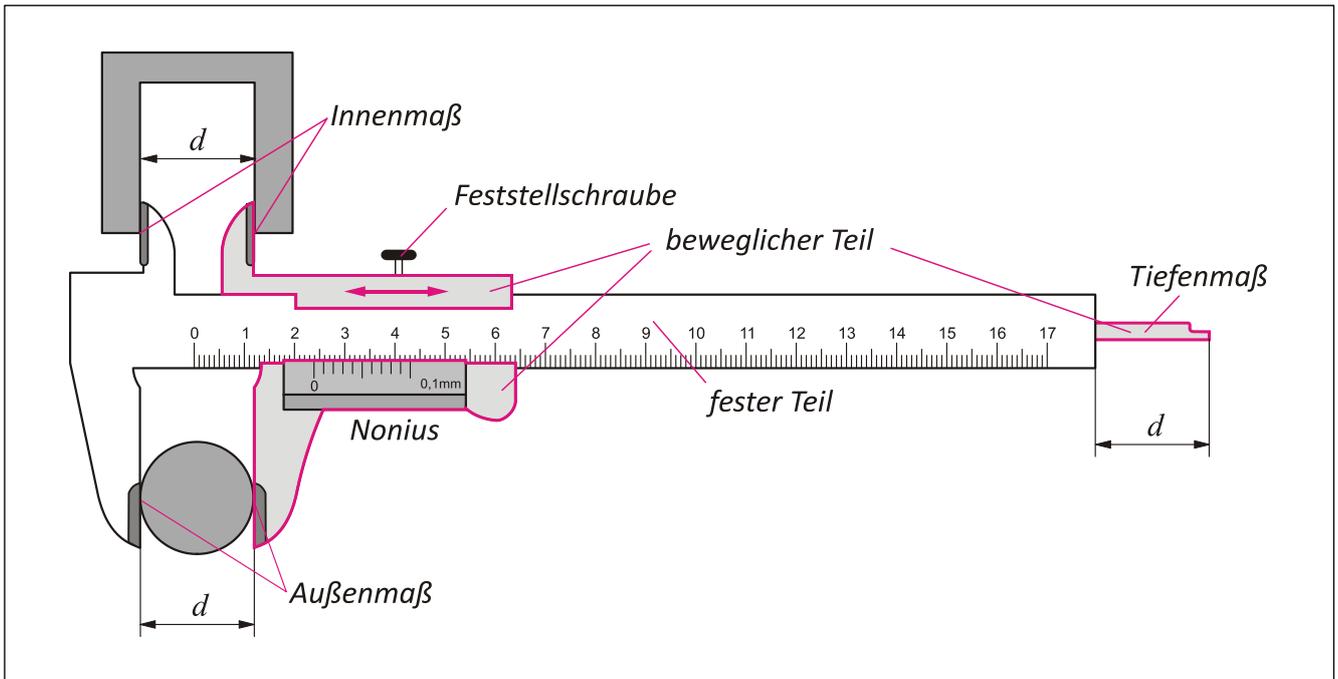


Bild 3.1: Prinzipskizze eines Messschiebers

Der Messschieber besteht aus einem feststehenden und einem beweglichen Teil. Zum feststehenden Teil gehören der Messschenkel für die Aufnahme des Innen- bzw. des Außenmaßes und die Millimeterskala.

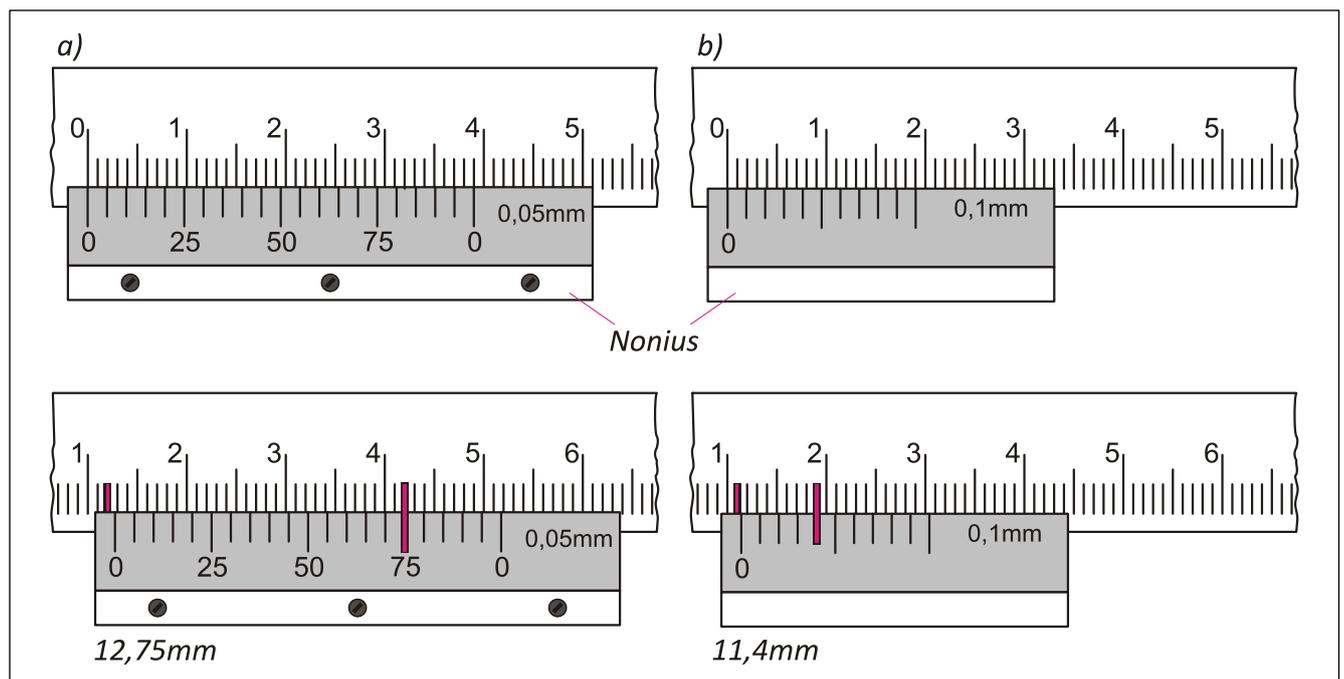


Bild 3.2: Messwertablesung

Da mit einer Bügelmessschraube ein sehr hoher Messdruck erzeugt werden kann, ist die Messtrommel mit einer Ratschenkupplung versehen. Diese dreht sich leer weiter, wenn ein gewisser Messdruck überschritten wird (*Drehmomentbegrenzung*).

Diese Vorgehensweise ist sehr wichtig, da sonst die Messunsicherheit größer ist als 0,01 mm. Ein zu großer Messdruck kann sogar eine Deformierung des Messgegenstandes oder die Zerstörung der Messspindel zur Folge haben.

Wichtiger Hinweis: *Bei direkter Berührung der Hartmetallmessflächen mit dem Messgegenstand, ist grundsätzlich die Ratschenkupplung zu verwenden!*

Das **Bild 3.4** zeigt einige Beispiele für die Ablesung der Bügelmessschraube.

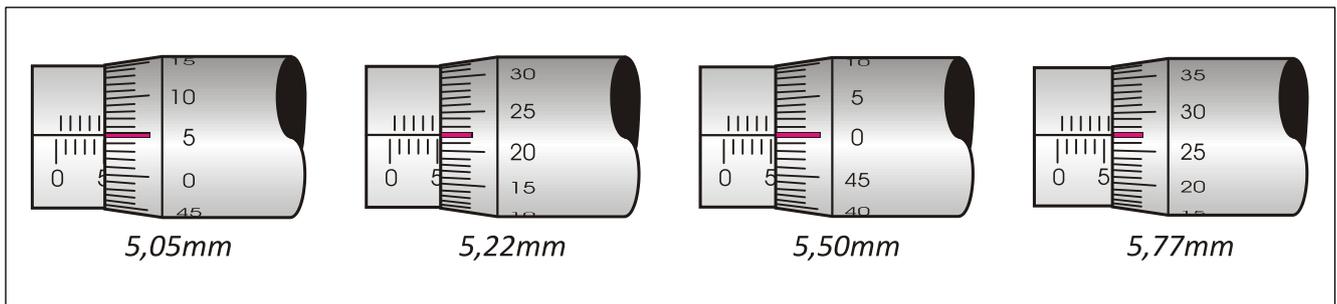


Bild 3.4: Messwertablesung

3.2 Massenbestimmung durch Wägung

3.2.1 Wägeprinzipien

Dem Wägen liegt das Gesetz der Massenanziehung zugrunde. Auch im Schwerfeld der Erde erfährt jede Masse eine Anziehungskraft, die der Masse proportional ist. Diese Kraft kann dabei mit einer bekannten Kraft verglichen werden, die auf verschiedene Weise erzeugt werden kann.

- Die Vergleichskraft ist das Gewicht einer bekannten Masse. Bei dieser klassischen Methode (*Balkenwaage*) werden die entstehenden Momente verglichen.
- Die Vergleichskraft entsteht durch Streckung einer weichen Feder (*Federwaage*).
- Die Vergleichskraft entsteht durch Deformierung eines steifen Federkörpers. Diese Deformierung wird z.B. mit einem Dehnungsmessstreifen oder piezoelektrisch gemessen (*Elektromechanische Waagen*).
- Die Vergleichskraft wird pneumatisch oder hydraulisch erzeugt. Dabei ist der Druck ein Maß für das zu messende Gewicht.
- Die Vergleichskraft wird elektrodynamisch durch eine Magnetspule erzeugt, die sich in einem permanent-magnetischen Feld befindet. Dabei ist der durch eine Spule fließende Strom ein Maß für das zu messende Gewicht.
- Die Vergleichskraft entsteht durch Eintauchen eines Körpers in eine Flüssigkeit. Die Tauchtiefe und die damit variierende Auftriebskraft ist ein Maß für das zu messende Gewicht.

Nur im ersten und letzten Fall werden zwei Gewichte miteinander verglichen. Bei Wägeeinrichtungen nach diesem Prinzip ist die Kalibrierung unabhängig von der Fallbeschleunigung, also standortunabhängig. Bei den anderen Wägeprinzipien ist grundsätzlich der Unterschied der Fallbeschleunigung an verschiedenen Orten zu berücksichtigen.

3.2.2 Messtechnische Begriffe und Eigenschaften von Waagen

a) Wägebereich

Der Wägebereich (*Messbereich*) ist der Teil des Anzeigebereichs, für den die Abweichungen einer Waage eingehalten werden müssen. Der Wägebereich wird nach oben durch die Höchstlast begrenzt. Die untere Grenze bildet die Mindestlast. Sie ergibt sich aus der Forderung, dass die relative Abweichung einer Wägung einen bestimmten Wert nicht überschreiten sollte. Nur innerhalb dieses Bereiches darf die Waage im eichpflichtigen Verkehr benutzt werden.

b) Empfindlichkeit

Bei nicht-selbsteinspielenden Waagen bzw. bei Waagen mit analoger Skala ist die Empfindlichkeit E der Quotient aus der Verschiebung der Ablesemarke ΔL (*Ausschlag*) und der verursachenden Belastungsänderung Δm .

$$E = \Delta L / \Delta m \quad \text{gemessen in Längeneinheiten / Masseinheiten}$$

Bei Waagen mit Ziffernanzeige ist die Empfindlichkeit E der Quotient aus der Anzahl der Ziffernschritte z und der verursachenden Belastungsänderung Δm .

$$E = z / \Delta m \quad \text{gemessen in Anzahl der Ziffernschritte / Masseinheiten}$$

c) Eichwert

Der Eichwert e wird der Berechnung der Eichfehlergrenzen (*siehe S. 56*) zugrunde gelegt. Er kann gleich dem Skalenwert oder dem digitalen Ziffernschritt sein.

3.3 Kalorimetrische Messungen

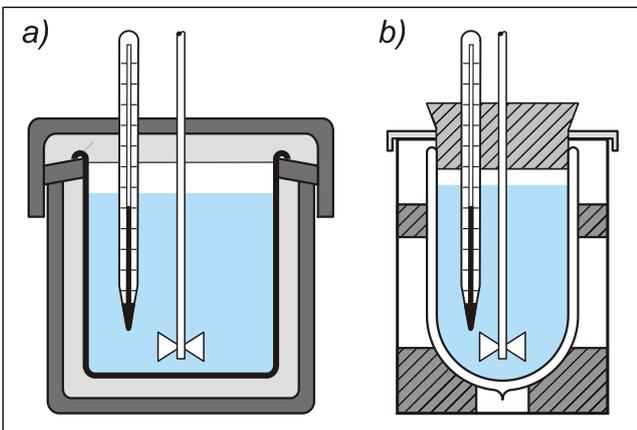


Bild 3.5: Kalorimeteranordnungen

Wärmemengen werden im Kalorimeter bestimmt. Das sind nach außen wärmeisolierte und mit einer gewissen Menge einer Flüssigkeit 1 (*meist Wasser*) bekannter spezifischer Wärmekapazität c gefüllte Gefäße. Die zu bestimmende Wärmemenge eines beliebig anderen Stoffes 2 ergibt sich aus einer Energiebilanz der im Inneren des Kalorimeters ausgetauschten Anteile. Gibt man einen Körper (*Stoff 2*) mit der Temperatur ϑ_2 in das mit Wasser gefüllte Kalorimeter der Temperatur ϑ_1 , so gibt der Körper bei $\vartheta_2 > \vartheta_1$ eine Wärmemenge ΔQ ab. Ist $\vartheta_2 < \vartheta_1$ so gibt das Wasser eine Wärmemenge ΔQ ab.

Die ausgetauschte Wärmemenge ΔQ ist gleich dem Produkt aus der Wärmekapazität c , der Masse m und der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ des betreffenden Stoffes. Dabei ist die Wärmekapazität c die Wärmemenge, die man benötigt, um 1g des Stoffes um 1K zu erwärmen (*bei Wasser $c_w = 4,1868 \text{ J}$*). So gilt:

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta \quad [c] = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (3.1)$$

Um das Kalorimeter näherungsweise als abgeschlossenes System behandeln zu können, muss durch die Konstruktion ein Energieaustausch mit der Umgebung weitgehend vermieden werden.

Das Mehrfachkalorimeter (**Bild 3.5a**) besteht aus mehreren ineinander gesetzten Metallgefäßen, die innen zur Vermeidung von Strahlungsverlusten verspiegelt sind. Verluste infolge Wärmeleitung und Konvektion werden durch die isolierten Distanzstücke sehr klein gehalten.

Dewargefäße (**Bild 3.5b**) sind gläserne Vakuumgefäße, deren Innenwandungen ebenfalls verspiegelt sind. Sie verhalten sich hinsichtlich der Verluste günstiger als die Mehrfachkalorimeter. In die jeweilige Energiebilanz geht auch die mit dem Kalorimetergefäß und dem apparativen Zubehör (z.B. *Thermometer, Rührer*) ausgetauschte Wärmemenge ein. Außerdem muss der nicht vollständig unterdrückbare Energieaustausch des Kalorimetersystems mit der weiteren Umgebung berücksichtigt werden.

Die Wärmekapazität K einer Kalorimeteranordnung ist die im Temperaturintervall $\Delta\vartheta$ ausgetauschte Wärmemenge ΔQ geteilt durch $\Delta\vartheta$. Nach Gleichung (3.1) ist daher

$$K = m \cdot c = \frac{\Delta Q}{\Delta\vartheta} \quad [K] = \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (3.2)$$

Da die Anordnung aus verschiedenen Teilen besteht, ist eine Berechnung der Wärmekapazität schwierig und die experimentelle Bestimmung vorzuziehen. Das Kalorimeter wird mit einer bestimmten Menge warmen Wassers (*Masse m_w , Temperatur ϑ_w*) gefüllt und eine abgemessene Menge kalten Wassers (*Masse m_k , Temperatur ϑ_k*) dazugegeben. Nach erfolgtem Wärmeaustausch stellt sich eine Mischungstemperatur ϑ_m ein.

Sieht man zunächst von einer Beteiligung der Umgebung an dem Vorgang ab, so ergibt sich folgende Energiebilanz:

$$Q_{zu} = Q_{ab} + Q_{ab(K)}$$

Das kalte Wasser nimmt die Wärmemenge Q_{zu} auf,

$$Q_{zu} = c_w \cdot m_k \cdot (\vartheta_m - \vartheta_k)$$

während das warme Wasser die Wärmemenge Q_{ab}

$$Q_{ab} = c_w \cdot m_w \cdot (\vartheta_w - \vartheta_m)$$

und die Kalorimeteranordnung die Wärmemenge $Q_{ab(K)}$ abgeben.

$$Q_{ab(K)} = K \cdot (\vartheta_w - \vartheta_m).$$

Die geringfügige Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität des Wassers c_w wird bei der Betrachtung vernachlässigt. Es gilt also

$$(c_w \cdot m_w + K) \cdot (\vartheta_w - \vartheta_m) = c_w \cdot m_k \cdot (\vartheta_m - \vartheta_k) \quad (3.3)$$

und die Wärmekapazität der Kalorimeteranordnung wird zu

$$K = c_w \cdot \left(m_k \cdot \frac{\vartheta_m - \vartheta_k}{\vartheta_w - \vartheta_m} - m_w \right). \quad (3.4)$$

Bei den Messungen ist der Wärmeaustausch mit der Umgebung des Kalorimeters trotz aller Vorkehrungen unvermeidlich.

Da der Mischvorgang eine endliche Zeit beansprucht, entspricht die gemessene Mischungstemperatur nicht dem Wert, der sich für den Fall unendlich schnellen Temperaturengleiches einstellen würde. Er lässt sich jedoch aus einem **Temperatur-Zeit-Diagramm (Bild 3.6)** durch Extrapolation gewinnen. Dieses Diagramm berücksichtigt auch die Trägheit der Anzeige bei der Temperaturmessung der verschiedenen Thermometer.

Die Temperatur der Kalorimeterflüssigkeit – in diesem Fall die des warmen Wassers – wird während einer **Vorperiode A-B** von etwa **3 – 5 min** alle **30s** abgelesen und notiert.

Die **Hauptperiode B-F** wird durch das Eingießen des in diesem Fall kalten Wassers eingeleitet und umfasst den Mischvorgang, dessen Temperaturverlauf so genau wie möglich bestimmt wird. (Im beschriebenen Fall möglichst ungefähr alle **5s**, bei länger dauernden Mischvorgängen kann diese Zeit angepasst werden).

Es schließt sich eine **Nachperiode F-G** von etwa **3 – 5 min** mit Messungen aller **30s** an. Wegen der Kürze der Vor- und Nachperiode ist der an sich exponentielle Temperaturverlauf durch die Geraden **AB** und **FG** hinreichend genau wiedergegeben.

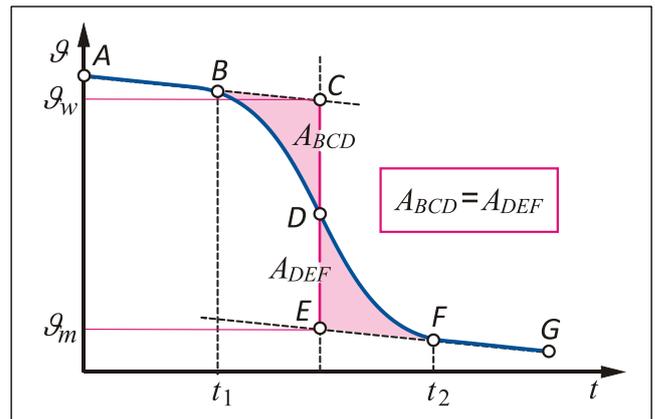


Bild 3.6: Temperatur-Zeit-Diagramm

Aus diesem Temperaturverlauf lässt sich auf den Temperaturverlauf bei unendlich schnellem Ausgleich schließen, indem eine Senkrechte **CE** so gezeichnet wird, dass die Flächen **BCD** und **DEF** gleich groß sind.

Als Temperaturen ϑ_w und ϑ_m werden diejenigen gewählt, die den Punkten **C** und **E** entsprechen.

Beispiel 3.1: Bestimmung der Wärmekapazität eines Kalorimeters

Ausgangsgrößen	
gemessen:	gegeben:
$\vartheta_k = (22,9 \pm 0,1) \text{ }^\circ\text{C}$	$c_w = 4,182 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$
$m_{Kal} = (711,0 \pm 0,2) \text{ g}$	
$(m_{Kal} + m_w) = (927,5 \pm 0,2) \text{ g}$	
$(m_{Kal} + m_w + m_k) = (1146,5 \pm 0,2) \text{ g}$	
graphisch ermittelt (siehe Bild 3.6):	
$\vartheta_w = (39,1 \pm 0,05) \text{ }^\circ\text{C}$	
$\vartheta_m = (31,4 \pm 0,05) \text{ }^\circ\text{C}$	
$u(\vartheta_w), u(\vartheta_m)$ abgeschätzt	

Zur Berechnung der Unsicherheit der Wärmekapazität des Kalorimeters wird im Folgenden die Min-Max-Methode angewendet. Damit ein Messwert maximal oder minimal werden kann, muss die neben ihm stehende Messabweichung addiert bzw. subtrahiert werden. Folglich gilt allgemein:

$$x_{Max} = x + u(x)$$

$$x_{Min} = x - u(x)$$

Berechnung der Masse des warmen Wassers

$$m_w = (m_{Kal} + m_w) - m_{Kal} = 927,5 \text{ g} - 711,0 \text{ g} = \underline{216,5 \text{ g}}$$

Abweichung

$$2 \cdot u(m) = 2 \cdot (0,2 \text{ g}) = \underline{0,4 \text{ g}} \text{ (abgeschätzt)} \Rightarrow m_w = (216,5 \pm 0,4) \text{ g}$$

Berechnung der Masse des kalten Wassers

$$m_k = (m_{Kal} + m_w + m_k) - (m_{Kal} + m_w) = 1146,5 \text{ g} - 927,5 \text{ g} = \underline{219,0 \text{ g}}$$

Abweichung

$$2 \cdot u(m) = 2 \cdot (0,2 \text{ g}) = \underline{0,4 \text{ g}} \text{ (abgeschätzt)} \Rightarrow m_k = (219,0 \pm 0,4) \text{ g}$$

Bestimmungsgleichung des Kalorimeters

$$K = c_w \cdot \left(m_k \cdot \frac{\vartheta_m - \vartheta_k}{\vartheta_w - \vartheta_m} - m_w \right)$$

$$K = 4,182 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot \left(219,0 \text{ g} \cdot \frac{(31,4 - 22,9)^\circ\text{C}}{(39,1 - 31,4)^\circ\text{C}} - 216,5 \text{ g} \right) = \underline{105,6 \text{ J/K}}$$

Fehlerberechnung über Min-Max-MethodeMaximum vom K

$$K = c_w \cdot \left(m_{k(\text{Max})} \cdot \frac{\vartheta_{m(\text{Max})} - \vartheta_{k(\text{Min})}}{\vartheta_{w(\text{Min})} - \vartheta_{m(\text{Max})}} - m_{w(\text{Min})} \right)$$

$$K = 4,182 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot \left(219,4 \text{ g} \cdot \frac{(31,45 - 22,8)^\circ\text{C}}{(39,05 - 31,45)^\circ\text{C}} - 216,1 \text{ g} \right) = \underline{140,56 \text{ J/K}}$$

Minimum vom K

$$K = c_w \cdot \left(m_{k(\text{Min})} \cdot \frac{\vartheta_{m(\text{Min})} - \vartheta_{k(\text{Max})}}{\vartheta_{w(\text{Max})} - \vartheta_{m(\text{Min})}} - m_{w(\text{Max})} \right)$$

$$K = 4,182 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot \left(218,6 \text{ g} \cdot \frac{(31,35 - 23,0)^\circ\text{C}}{(39,15 - 31,35)^\circ\text{C}} - 216,9 \text{ g} \right) = \underline{71,57 \text{ J/K}}$$

Bestimmung des absoluten Fehlers von K

$$u(K) = \frac{K_{\text{max}} - K_{\text{min}}}{2} = \frac{(140,56 - 71,57) \text{ J/K}}{2} = \underline{34,495 \text{ J/K}}$$

Ergebnisdarstellung

$$K = (105,6 \pm 34,5) \text{ J/K} \Rightarrow \frac{u(K)}{K} = \underline{32,7 \%}$$

3.4 Elektrische Messgeräte

Im Praktikum werden zur Messung von elektrischen Strömen und Spannungen **Zeigerinstrumente und Digitalmultimeter** verwendet.

3.4.1 Analoge Zeigerinstrumente

Auf den Skalenträger des **Zeigerinstrumentes** sind neben den Skalenteilungen und der Einheit der zu-messenden Größe auch andere Zeichen angegeben, die die Eigenschaften des Messinstruments kenn-zeichnen:

- **Stromart**, mit der das Gerät betrieben werden darf:
 - Gleichstrom (*DC, direct current*)
 - ~ Wechselstrom (*AC, alternating current*)
- **Messwerk**, das den Ausschlag erzeugt
- **Genauigkeitsklasse**, die die systematische Abweichung (*Garantiefehler*) des Messgerätes angibt (*siehe S.57*).

Zum Teil ist auf dem Skalenträger oder dem Gehäuse noch die Größe des Innenwiderstandes des Gerätes oder (*bei Strommessern*) der Spannungsabfall über dem Messpfad bei Vollausschlag angegeben.

Bei Messgeräten für Gleichstrom sind die Anschlussklemmen mit „+“ und „-“ gekennzeichnet. Beim Aufbau der Schaltung ist die mit „+“ gekennzeichnete Klemme mit dem Pluspol der Stromquelle bzw. der Schaltung zu verbinden, die mit „-“ bezeichnete mit dem Minuspol.

Bei Vielfachmessern ist zunächst der unempfindlichste Bereich einzustellen. Erst dann darf unter ständiger Kontrolle auf Messbereiche höherer Empfindlichkeit umgeschaltet werden.



Bild 3.7: Analoges Amperemeter

Beispiel für das Ablesen von Skalen analoger Messgeräte

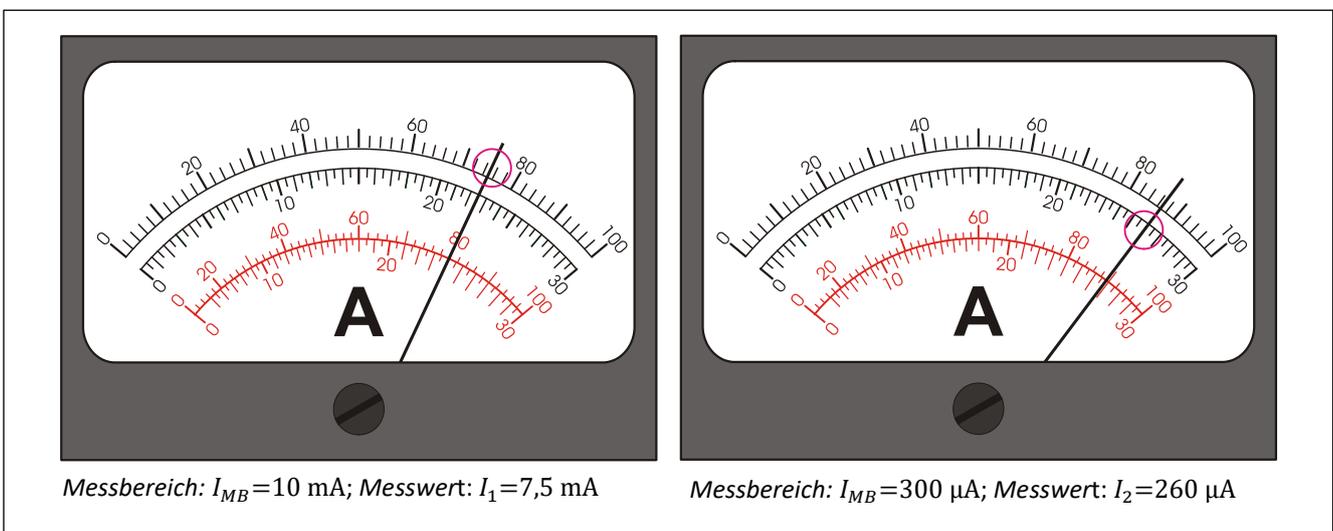


Bild 3.8: Gleichstrommessbereich

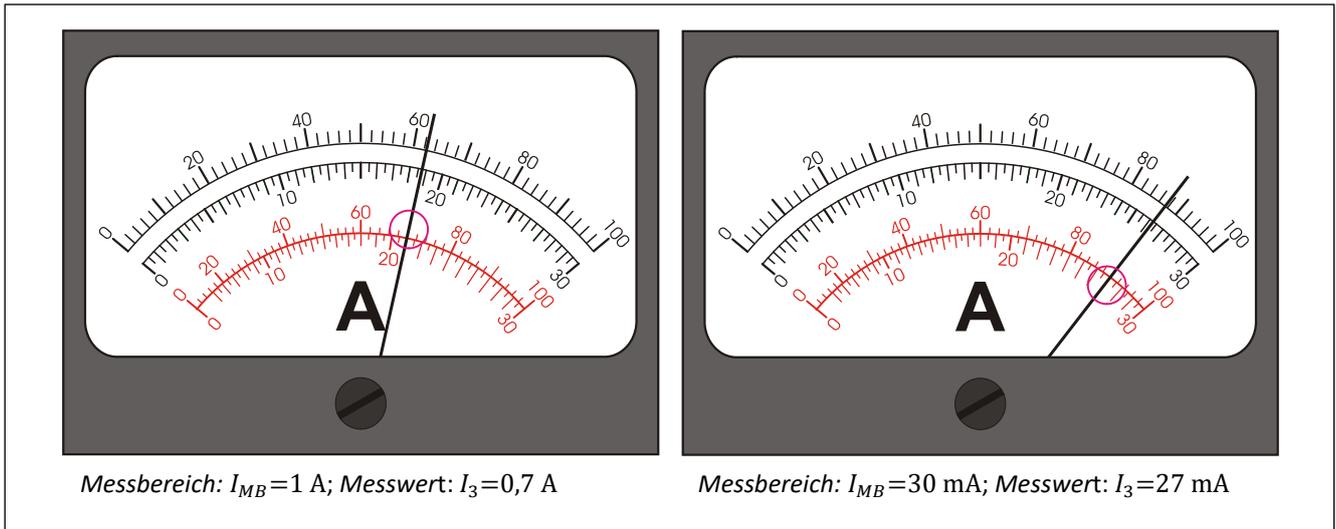


Bild 3.9: Wechselstrommessbereich

Die meisten Spannungsmesser beruhen auf Wirkungen des elektrischen Stromes, sind also nach Spannungen normierte Strommesser. Die bei einem bestimmten Strom am Gerät anliegende Spannung ergibt sich durch Multiplikation mit dem Innenwiderstand.

- Voltmeter werden **parallel** zum interessierenden Schaltungselement geschaltet und haben einen relativ großen Innenwiderstand im Vergleich zu den übrigen Widerständen des Stromkreises.
- Amperemeter werden in den Weg des Stromes hinein geschaltet (**in Reihe**) und müssen daher einen relativ geringen Innenwiderstand haben.

3.4.2 Digitalmultimeter

Digitalmultimeter zeigen die an einem Messwiderstand abfallende Spannung digital an. Durch umschaltbare Teiler werden Spannungs- und Strombereiche vorgewählt bzw. Gleichrichter vorgeschaltet. Die Messgenauigkeit wird durch die Spannungsteiler (bzw. Messverstärker) und den Analog-Digital-Konverter begrenzt (siehe S. 57). Ansonsten gelten die für den Vielfachmesser gemachten Aussagen. Bei der Messung von Gleichspannung oder Gleichstrom sind mitunter die Eingänge „+“ mit „high“ und „-“ mit „low“ gekennzeichnet (Bezugspotential).

Werden Stromstärke und Spannung an einem Messobjekt gleichzeitig bestimmt, so tritt durch die Schaltung stets eine systematische Abweichung auf. Wählt man die Schaltung gemäß **Bild 3.10**, so wird die Stromstärke, bei der Schaltung nach **Bild 3.11** die Spannung, zu groß gemessen.

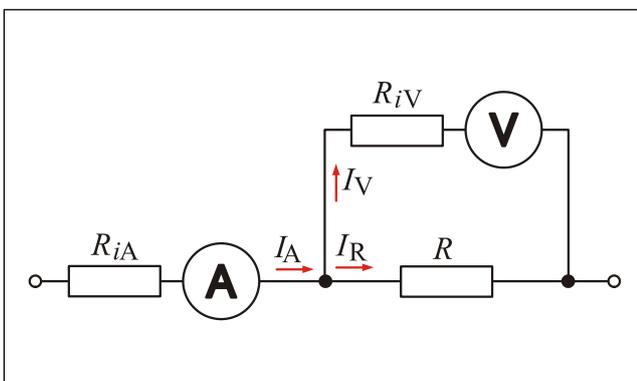


Bild 3.10: spannungsrichtige Schaltung

$$\frac{I_V}{I_R} = \frac{R}{R_{iV}}$$

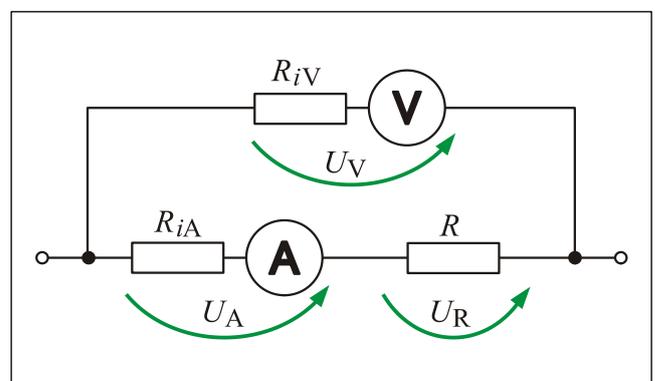


Bild 3.11: stromrichtige Schaltung

$$\frac{U_A}{U_R} = \frac{R_{iA}}{R}$$

3.5 Elektronenstrahloszilloskop

3.5.1 Funktionelle Zusammenhänge

Zur Darstellung und zur Frequenzmessung schnell veränderlicher elektrischer Signale, sowie zur Spannungsmessung, eignet sich besonders das Elektronenstrahloszilloskop. Der wichtigste Bestandteil des Oszilloskops ist neben

- dem Y-Verstärker (*Vertikalverstärker*),
- dem X-Verstärker (*Horizontalverstärker*),
- dem Zeitablenkgenerator (*Sägezahngenerator*) und
- dem Synchronisier- und Triggerverstärker

die **Elektronenstrahlröhre** (auch *Kathodenstrahlröhre* genannt).

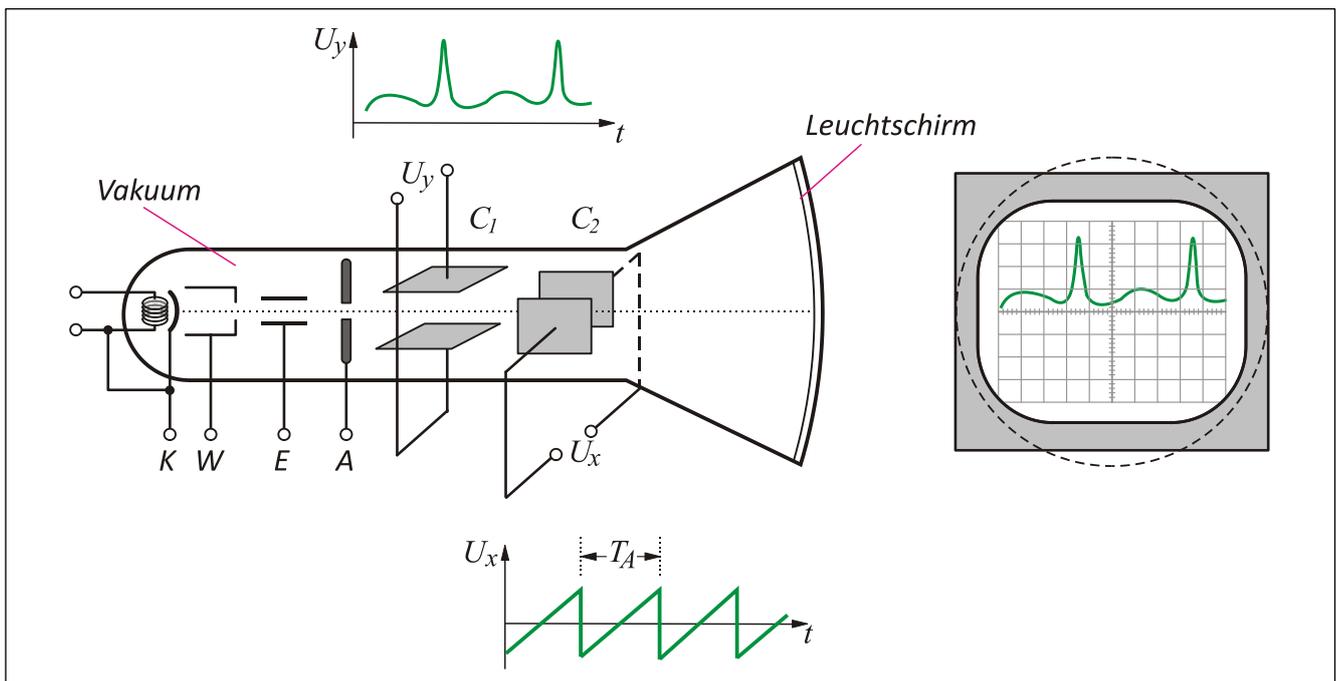


Bild 3.12: Querschnitt einer Elektronenstrahlröhre (schematisch)

Der Hauptbestandteil einer Elektronenstrahlröhre ist ein evakuierter Glaskolben. Hier befinden sich

- die Glühkathode **K** zur Emission von Elektronen,
- der Wehnelt-Zylinder **W** zur Helligkeitsregelung,
- die Elektronenlinse **E** zur Fokussierung des Strahls,
- die Anode **A** zur Beschleunigung der Elektronen,
- das Kondensatorplattenpaar C_1 zur Vertikalablenkung,
- das Kondensatorplattenpaar C_2 zur Horizontalablenkung des Elektronenstrahls.

Die Plattenpaare C_1 und C_2 haben häufig eine gemeinsame Erdung. Die Innenseite der Frontscheibe ist als Leuchtschirm ausgebildet.

Liegt an den Plattenpaaren C_1 und C_2 keine Spannung an, so trifft der von der Kathode ausgehende Elektronenstrahl unabgelenkt auf die Mitte des Leuchtschirms. Legt man an das Plattenpaar C_2 eine Sägezahnspannung an, so entsteht zwischen den Platten ein elektrisches Feld, dessen Stärke sich ebenfalls sägezahnförmig ändert, so dass der Elektronenstrahl mit gleichförmiger Geschwindigkeit in horizontaler Richtung von links nach rechts über den Leuchtschirm „gefahren“ wird. Ist der Strahl am rechten Bildrand angekommen, so „springt“ er nach links zurück (in einer sehr kurzen Zeitdauer) und läuft erneut nach rechts usw. Die Geschwindigkeit bzw. Ablenkzeit T_A für den Strahl kann in diskreten Stufen

eingestellt werden. Am Einstellknopf ist jedoch nicht T_A , sondern T_A **pro Einteilungseinheit** der Leuchtschirmskala, z.B. **5ms/div** oder **5ms/cm**, angegeben.

Wird auch an das Plattenpaar C_1 (**Y-Eingang des Oszilloskops**) eine zeitabhängige Spannung angelegt, so wird der Strahl gleichzeitig auch in vertikaler Richtung proportional zur Größe des Eingangssignals abgelenkt. Die Empfindlichkeit des **Y-Verstärkers** kann ebenfalls in Schritten variiert werden (*angegeben in V/div oder V/cm*), so dass mit dem Oszilloskop auch die Höhe der Spannung des Eingangssignals gemessen werden kann.

Das Oszilloskop kann auch im **X-Y-Betrieb** eingesetzt werden. Dazu wird die Horizontalablenkung ausgeschaltet (*es liegt dann keine Sägezahnspannung am Plattenpaar C_2 an*). Ein zweites Signal kann nun auf den **X-Eingang** des Oszilloskops gegeben werden. Auf dem Schirm können so funktionale Zusammenhänge $Y(X)$ dargestellt werden.

3.5.2 Zweikanaloszilloskop

Ein Zweikanaloszilloskop besitzt zwei gleichwertige **Y-Verstärker** mit zwei Eingangsbuchsen Y_I und Y_{II} . Obwohl nur eine Elektronenquelle (*Kathode*), d.h. nur ein Elektronenstrahl zur Verfügung steht, kann man jetzt trotzdem zwei verschiedene Spannungsverläufe gleichzeitig auf dem Schirm darstellen (*bei gleicher Zeitablenkung*), indem man die Verstärker **I** und **II** in ständigem Wechsel an das vertikal ablenkende Plattenpaar C_1 schaltet. Dies kann auf zwei verschiedene Weisen geschehen:

1. Betriebsart (mit „**Alt**“ bezeichnet)
 Die beiden **Y-Verstärker** werden durch einen elektronischen Schalter alternierend jeweils für eine volle Ablenkperiode T_A an das Plattenpaar C_1 geschaltet. Die Signale 1 und 2 werden also nacheinander aufgezeichnet.
2. Betriebsart (mit „**Chop**“ bezeichnet)
 Die Umschaltung der **Y-Verstärker** erfolgt hier mit sehr hoher Frequenz (*Chopperfrequenz z.B. 800kHz*), so dass innerhalb einer Ablenkperiode T_A die beiden Signale gleichzeitig erscheinen.

Schaltet man beim Zweistrahloszillographen die Zeitablenkung aus (*Taste „Hor.ext.“*), so wird automatisch der Verstärker **II** als **X-Verstärker** wirksam (*X-Y-Betrieb*).

3.5.3 Triggerung

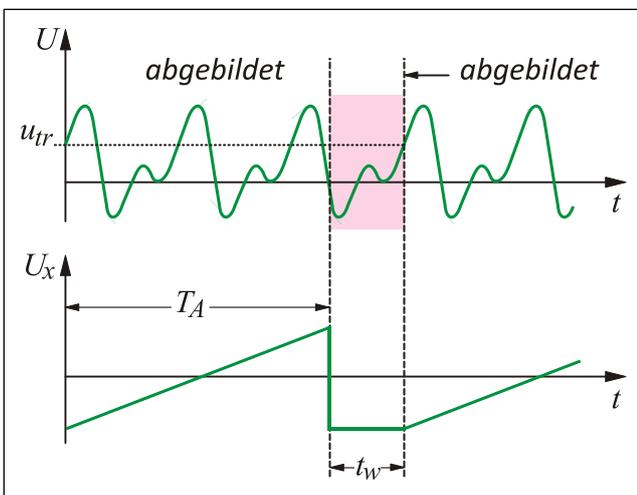


Bild 3.13: Triggerung

Damit bei der Aufzeichnung periodischer Vorgänge auf dem Schirm ein stehendes Bild entsteht, müsste die Ablenkzeit T_A des Elektronenstrahles (*Periodendauer des Sägezahns*) ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer des zu registrierenden Vorgangs sein. Diese Forderung ist bei fest einstellbaren Ablenkzeiten T_A (*diskreten Stufen*) für beliebige Periodendauern des zu messenden Signals im Allgemeinen nicht realisierbar.

Um trotzdem ein stehendes Bild zu bekommen, wird der Start des Sägezahnimpulses durch das Messsignal selbst über den Triggerverstärker so gesteuert, dass der Sägezahnimpuls ausgelöst wird, sobald das Messsignal einen bestimmten einstellbaren Wert (*Triggerschwelle*) erreicht hat. Nach

Ablauf einer Ablenkdauer T_A „wartet“ dann der Elektronenstrahl, bis die Eingangsspannung wieder die Triggerschwelle erreicht hat, um erneut das Eingangssignal darzustellen.

Neben dieser internen Triggerung ist auch eine externe Triggerung möglich, indem durch eine von außen zugeführte Spannung der Triggerverstärker ausgelöst wird.

3.5.4 Frequenz- und Spannungsmessung mit dem Oszilloskop

Mit dem Oszilloskop können Zeiten bzw. Frequenzen und Spannungswerte gemessen werden. Auf dem Oszilloskopschirm (**Bild 3.14**) ist das Bild einer sinusförmigen Wechselspannung dargestellt.

Zur Bestimmung der Frequenz ermittelt man zunächst die Periodendauer T der Wechselspannung. T ist die Zeit, die der Elektronenstrahl benötigt, um in horizontaler Richtung von z.B. einem Maximum zum nächsten Maximum zu laufen.

Die Zeit, die der Strahl für 1cm (= 1 Kästchen auf dem Schirm) benötigt, ist am **<TIME/DIV-SCHALTER>** in Einheiten **time/cm** abzulesen (Wert B). Ist x der Abstand von n Perioden, so ist

$$n \cdot T = x \cdot B \text{ und } f = \frac{1}{T} = \frac{n}{x \cdot B} \quad (3.5)$$

Zur Bestimmung des Spannungswertes, etwa des Scheitelwertes der dargestellten Sinusspannung, ermittelt man den Wert $\frac{1}{2}y$ in cm bzw. den Einheiten der Schirmeinteilung und multipliziert diesen Wert mit dem aus der Schalterstellung am **<AMPL>** (*Amplifier = Eingangsverstärker*) ersichtlichen Wert in V/cm.

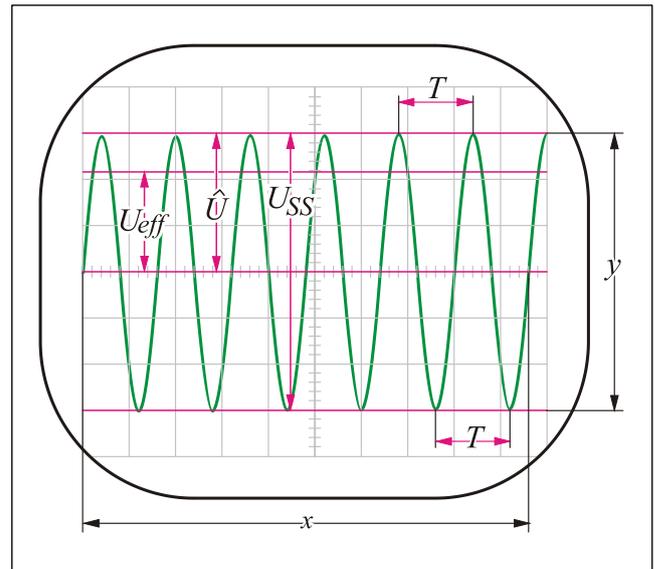


Bild 3.14: Oszillographenschirm

Beispiel 3.2: Ableseberechnung des Oszillographenschirms (aus **Bild 3.14**)

Berechnung der Schwingungsdauer T und der Frequenz f

$$\langle \text{TIME/DIV} \rangle = 20 \text{ ms}$$

$$x = 9,5 \text{ cm für 6 Perioden}$$

$$T = \frac{9,5 \text{ cm}}{6} \cdot 20 \frac{\text{ms}}{\text{cm}} = \underline{31,7 \text{ ms}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{31,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = \underline{31,5 \text{ Hz}}$$

Berechnung der Spitze-Spitze Spannung U_{SS} , der Spitze Spannung \hat{U} und der Effektivspannung U_{eff}

$$\langle \text{AMPL/DIV} \rangle = 0,2 \text{ V}$$

$$y = 6 \text{ cm (Spitze-Spitze Spannung } U_{SS})$$

$$y/2 = 3 \text{ cm (Spitze Spannung } \hat{U})$$

$$U_{SS} = 0,2 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 6 \text{ cm} = \underline{1,2 \text{ V}}$$

$$\hat{U} = 3 \text{ cm} \cdot 0,2 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = \underline{0,6 \text{ V}}$$

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{U} = \underline{0,42 \text{ V}}$$

4. Auswertung von Beobachtungen

4.1 Abschätzung der Genauigkeit von Messungen

Trotz ständiger Weiterentwicklung von Messgeräten durch Erhöhung der Zuverlässigkeit und Genauigkeit treten bei der quantitativen Bestimmung einer physikalischen Größe unvermeidbare Messabweichungen auf. Zur weiteren Verwendung der Messergebnisse ist es wichtig, ihre **Genauigkeit** oder ihre **Messabweichungen** abzuschätzen. Ziel dieses Abschnittes ist es, dem experimentell arbeitenden Studenten hierzu die notwendigen Kenntnisse zu vermitteln.

In älterer Literatur oder im Sprachgebrauch wird für die Messabweichung oft der Begriff „Fehler“ verwendet. Die verwendeten Termini in dieser Einführung beziehen sich auf die Festlegungen zum Sprachgebrauch in der **DIN1319 Teil 1 (1983)**.

Nicht betrachtet werden Messabweichungen durch „**grobe Fehler**“, wie z.B.:

- Versehen des Beobachters bei Bedienung bzw. Ablesung der Messinstrumente,
- Irrtum des Beobachters bei Protokollierung oder Auswertung der Messwerte oder
- Messverfahren bzw. Messbedingungen die sich als ungeeignet herausstellen.

Diese groben Messabweichungen führen zu nicht auswertbaren Ergebnissen bzw. zu falschen Aussagen. Sie müssen durch Sorgfalt und Kontrolle vermieden werden. Daher sollte zu jeder Messung mindestens eine Kontrollmessung, möglichst durch eine zweite Person, durchgeführt werden.

Mit einer Messung wird das Ziel verfolgt, den Wert einer physikalischen Größe zu bestimmen. Unvollkommenheiten von Geräten, Maßverkörperungen und menschlichen Sinnesorganen, unkontrollierbar äußere Einflüsse (wie *Erschütterungen*) und Eigenschaften des Messgegenstandes (wie z.B. *statistische Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls*) führen dazu, dass in der Regel das Messergebnis vom „*wahren Wert*“ abweicht, unabhängig davon ob ein solcher Wert existiert oder nicht.

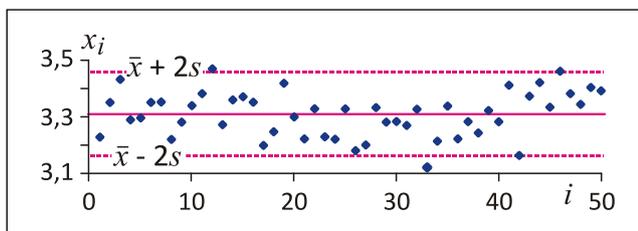


Bild 4.1: Streuung der Messwerte

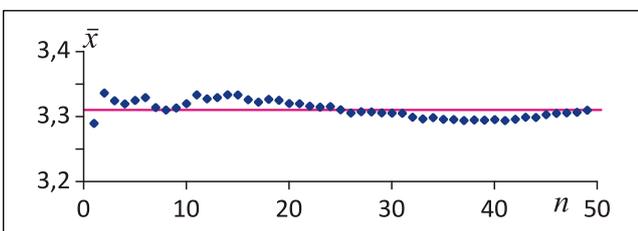


Bild 4.2: Konvergenz des Mittelwertes

Wir gehen bei der rechnerischen Behandlung der Messunsicherheit einer physikalischen Größe X davon aus, dass jede Messung im Prinzip beliebig oft (n -mal) wiederholbar ist. Dabei stimmen die einzelnen Messwerte x_i nach den obigen Überlegungen nicht überein, sondern streuen um einen Mittelwert \bar{x} (**Bild 4.1**), der mit $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert, den Erwartungswert x_E , konvergiert (**Bild 4.2**).

(Die für **Bild 4.1** und **4.2** verwendeten Messwerte sind in **Tabelle 4.1, S.27** erfasst.)

Die Abweichungen der einzelnen Messwerte vom Erwartungswert heißen **zufällige Messabweichungen** (*zufällige Abweichungen*). Da in der Praxis stets nur eine endliche Anzahl von Messungen vorliegt, muss die Rechnung eine Näherung für den Erwartungswert liefern sowie ein Intervall, in dem der Erwartungswert mit einer gegebenen statistischen Sicherheit liegen muss.

Auch wenn die Zahl der Messungen n sehr groß (*praktisch unendlich*) ist, ist der Erwartungswert nicht das angestrebte Messergebnis. Durch Unvollkommenheiten der Messgeräte (*verwendete Messprinzipien*), können zusätzlich zu den zufälligen Abweichungen noch **systematische Messabweichungen** (*systematische Abweichungen*) auftreten.

Im Gegensatz zu den zufälligen Abweichungen, die nach Betrag und Vorzeichen regellos schwanken, ist die systematische Abweichung nach Betrag und Vorzeichen konstant. Sie tritt bei jeder Wiederholung der Messung in gleicher Weise wieder auf (z.B. *wenn die Masse eines Wägstücks im Bereich der Herstellungstoleranzen etwas größer als der aufgeprägte Wert ist*).

Für die rechnerische Behandlung der systematischen Abweichungen lässt sich keine einfache, allgemeine Theorie angeben, wie es für die zufällige Abweichung möglich ist. Hier sollen nur die Hinweise für eine erste Abschätzung solcher Abweichungen gegeben werden.

4.1.1 Maximale Messunsicherheit bei Einzelmessung

In der experimentellen Praxis tritt häufig der Fall auf, dass zur Bestimmung einer physikalischen Größe X nur eine Messung durchgeführt wird, die direkt zum Endergebnis führt (*Messung und Kontrollmessung zur Vermeidung grober Fehler werden als eine Messung betrachtet*).

Die Messunsicherheit $u(x)$ der Messung wird dann durch die Anteile

- $u_z(x)$ zufällige Abweichung
- $u_s(x)$ systematische Abweichung

bestimmt.

Die zufällige Abweichung ist im einfachsten Fall die Ablesegenauigkeit einer Skale (z.B. *bei Vielfachmessern, Thermometern, Messschieber*).

Das **Bild 4.3** zeigt am Beispiel eines Quecksilberthermometers die Abschätzung einer solchen Messung:

Abgelesen wird das Ende des Quecksilberfadens. Es befindet sich im angegebenen Beispiel zwischen den Skalenwerten 25°C und 26°C . Teilt man gedanklich den Bereich zwischen den beiden Marken der Skale im einfachsten Fall in zwei gleich große Teile, so kann man sicher abschätzen, dass der Messwert zwischen $25,5^\circ\text{C}$ und $26,0^\circ\text{C}$ liegen muss (*auch eine feinere Teilung ist möglich*).

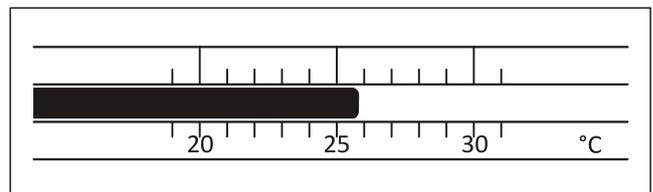


Bild 4.3: Skalenauszug Thermometer

Eine gute Interpolation würde einen Messwert für die Temperatur von $25,7^\circ\text{C}$ ergeben. Betrachten wir den Interpolationsbereich im Beispiel, so kann man den Messwert mit einer Genauigkeit von $u_z(T) = \pm 0,3 \text{ K}$ angeben. Das bedeutet, dass der „wahre“ Wert in dem Bereich zwischen

$$\vartheta_{min} = (25,7 - 0,3)^\circ\text{C} = 25,4^\circ\text{C} \text{ und}$$

$$\vartheta_{max} = (25,7 + 0,3)^\circ\text{C} = 26,0^\circ\text{C} \text{ liegt.}$$

Ohne Hilfsmittel (*wie z.B. Nonius oder Ableselupe*) lassen sich so Ablesegenauigkeiten bis zu 20% eines Skalenwertes erreichen.

Eine mögliche systematische Abweichung wird vom Hersteller angegeben (*Garantiefehlergrenze, Güteklasse*). Auf der Seite 56 sind für ausgewählte Messgeräte die Garantiefehlergrenzen aufgeführt. Unter dem **Punkt 6.6 Laborthermometer** finden Sie für den angegebenen Skalenbereich und Skalenwert eine systematische Abweichung $u_s(T) = \pm 1 \text{ K}$.

Die maximale Messunsicherheit ergibt sich aus der Summe der Beträge beider Abweichungsanteile, $u_z(T)$ und $u_s(T)$, zu allgemein:

$$u(X) = u_{max}(X) = \pm (|u_s(X)| + |u_z(X)|), \quad (4.1)$$

in diesem Fall $|u(T)| = 1,3 \text{ K}$ oder $u(T) = \pm 1,3 \text{ K}$. Damit lässt sich das Ergebnis der Messung wie folgt angeben:

$$\vartheta = (25,7 \pm 1,3) \text{ } ^\circ\text{C} \text{ oder } \vartheta = (26 \pm 1) \text{ } ^\circ\text{C} .$$

Auf Grund der abgeschätzten maximalen Messunsicherheit von etwa 1 K ist es sinnvoll, den abgelesenen Wert von 25,7°C auf 26°C zu runden. Die maximale Messunsicherheit begrenzt damit auch die sinnvolle Angabe der Stellen des ermittelten Wertes.

Zum Vergleich, der bei zusammengesetzten Größen auftretenden Abweichungsanteile der einzelnen Messgrößen, ist die Angabe der relativen Messunsicherheit oft gut geeignet. Unter der relativen Messunsicherheit versteht man das Verhältnis der Abweichung zur gemessenen Größe.

Relative Messunsicherheit:
$$\frac{|u(X)|}{X} = \left| \frac{u(X)}{X} \right| \quad (4.2)$$

Relative prozentuale Messunsicherheit:
$$\left| \frac{u(X)}{X} \right| \cdot 100\% \quad (4.3)$$

Ein weiterer möglicher Weg zur Bestimmung der zufälligen Abweichung ist die Ermittlung des Kleinst- bzw. des Größtwertes einer Messreihe bei weniger als zehn Messwerten (*bei größerer Messwertanzahl siehe Abschnitt 4.1.3*). Dazu liest man, unabhängig voneinander, drei oder vier Werte, ggf. nach jeweils neuer Einstellung ab und bildet die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert. Diese Differenz kann als zweifache zufällige Abweichung verwendet werden.

Beispiel 4.1: Längenmessung

	l / cm
1	29,4
2	29,6
3	29,7

$$l_{max} - l_{min} = 29,7 \text{ cm} - 29,4 \text{ cm} = \underline{0,3 \text{ cm}}$$

$$|u_z(l)| = \frac{1}{2} \cdot (l_{max} - l_{min}) = \underline{0,15 \text{ cm}}$$

4.1.2 Maximale Messunsicherheit bei indirekter Messung

Im Fall der indirekten Messung setzt sich die zu bestimmende physikalische Größe F funktionell aus mehreren gemessenen Größen x, y, \dots zusammen. Die zugehörigen maximalen Abweichungen dieser gemessenen Größen $u(x), u(y), \dots$ sollten bekannt sein. Zu berechnen ist die maximale Messunsicherheit der Größe F .

Dazu entwickelt man die funktionelle Abhängigkeit $F = F(x, y, \dots)$ in eine Taylor-Reihe, die man nach den linearen Gliedern abbricht:

$$F(x + u(x), y + u(y), \dots) \approx F(x, y, \dots) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot u(x) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot u(y) + \dots \right) \quad (4.4)$$

Diese Näherung ist nur dann zulässig, wenn die Abweichungen nicht zu groß sind (*relative Abweichung* $u(x)/x < 10\%$) oder wenn die Funktion linear von den Variablen abhängt.

Nun sind Messabweichungen $u(x)$, $u(y)$, ... erstens nur dem Betrag nach gegeben und zweitens im Allgemeinen unabhängig voneinander. Die resultierende maximale Messunsicherheit $u(F)$ erhält man, indem die Summanden der Klammern auf der rechten Seite der Gleichung (4.4) betragsweise aufsummiert werden:

$$u(F) = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \cdot u(x) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \cdot u(y) \right| + \dots \quad (4.5)$$

Die Gleichung (4.5) erhält man auch, wenn das totale Differential der Funktion F gebildet wird

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \dots$$

und die Differentiale dF , dx , dy , ... durch die Abweichungen $u(F)$, $u(x)$, $u(y)$, ... ersetzt und die Beträge aller Summanden gebildet sowie addiert werden.

Treten die gemessenen Größen x , y , ... in der Funktion F speziell in der Form eines Produktes auf, z.B.

$$F = A \cdot x^a \cdot y^b \quad (A, a, b = \text{konstant}), \quad (4.6)$$

so kann man einfacher mit Hilfe der logarithmischen Differentiation zur relativen Messunsicherheit gelangen. Man bildet zunächst den natürlichen Logarithmus von F ,

$$d(\ln F) = \ln F = \ln A + a \cdot \ln x + b \cdot \ln y,$$

und berechnet dann das totale Differential $d(\ln F)$ dieses Ausdruckes

$$\frac{1}{F} \cdot dF = a \cdot \frac{1}{x} \cdot dx + b \cdot \frac{1}{y} \cdot dy$$

Nun ersetzt man die Differentiale durch die entsprechenden Abweichungen, bildet die Beträge der einzelnen Summanden und erhält die relative Messunsicherheit

$$\left| \frac{u(F)}{F} \right| = a \cdot \left| \frac{u(x)}{x} \right| + b \cdot \left| \frac{u(y)}{y} \right|. \quad (4.7)$$

Bilden die gemessenen Größen durch eine Multiplikation oder eine Division den Endwert der Messung, so addieren sich die relativen Abweichungen unter Beachtung der Exponenten zur maximalen Messunsicherheit des Endwertes.

Die folgenden Beispiele sollen die Bestimmung der maximalen Messunsicherheit bei indirekter Messung demonstrieren.

Beispiel 4.2: Messung eines elektrischen Widerstandes

Zur Bestimmung des elektrischen Widerstandes werden Spannung U und Strom I gemessen. Der Widerstand R wird nach dem Ohmschen Gesetz ermittelt.

Bestimmung der Messabweichung

	Spannung	Strom
• eingestellter Messbereich	$U_{MB} = 10 \text{ V}$	$I_{MB} = 1 \text{ A}$
• abgelesener Wert	$U = 9,15 \text{ V}$	$I = 0,821 \text{ A}$
• zufällige Messunsicherheit $u_z(x)$ (Abweichung durch ungenaue Ablesung)	0,2 V $u_z(U) = \pm 0,1 \text{ V}$	0,02 A $u_z(I) = \pm 0,01 \text{ A}$
• systematisch Messunsicherheit $u_s(x)$ Genauigkeitsklasse 1,5 (1,5% vom Skalenendwert)	$u_s(U) = \pm 0,15 \text{ V}$	$u_s(I) = \pm 0,015 \text{ A}$
• Gesamt Messunsicherheit $u(x) = u_z(x) + u_s(x)$	$u(U) = \pm 0,25 \text{ V}$	$u(I) = \pm 0,025 \text{ A}$
• Berechnungsgrundlage (Ohm. Gesetz)	$R = \frac{U}{I} = \frac{9,15 \text{ V}}{0,821 \text{ A}} = \underline{11,1443 \Omega}$	

Maximale Messunsicherheit mit der Min-Max-Methode

• Bestimmung von R_{max}	$R_{max} = \frac{U_{max}}{I_{min}} = \frac{(9,15 + 0,25)\text{V}}{(0,821 - 0,025)\text{A}} = \frac{9,40 \text{ V}}{0,796 \text{ A}} = \underline{11,809 \Omega}$
• Bestimmung von R_{min}	$R_{min} = \frac{U_{min}}{I_{max}} = \frac{(9,15 - 0,25)\text{V}}{(0,821 + 0,025)\text{A}} = \frac{8,90 \text{ V}}{0,846 \text{ A}} = \underline{10,520 \Omega}$
• Bestimmung von $u(R)$	$u(R) = \frac{R_{max} - R_{min}}{2} = \frac{(11,809 - 10,520)\text{V}}{2} = \underline{0,644 \Omega}$

Maximale Messunsicherheit mit dem totalem Differential

Zur Berechnung der partiellen Ableitungen gelten die gleichen Differentiationsregeln wie für Funktionen mit einer Veränderlichen.

• Bestimmung der Ableitungen	$u(R) = \left \frac{\partial R}{\partial U} \cdot u(U) \right + \left \frac{\partial R}{\partial I} \cdot u(I) \right $ $\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \quad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$
	$u(R) = \left \frac{1}{I} \cdot u(U) \right + \left -\frac{U}{I^2} \cdot u(I) \right $
• Einsetzen in die Gleichung	$u(R) = \left \frac{1}{0,821 \text{ A}} \cdot 0,25 \text{ V} \right + \left -\frac{9,15 \text{ V}}{(0,821 \text{ A})^2} \cdot 0,025 \text{ A} \right $ $u(R) = 0,3045 \Omega + 0,3394 \Omega = \underline{0,644 \Omega}$

Maximale Messunsicherheit nach logarithmischer Differentiation

- Ermittlung des relativen Fehlers

$$\left| \frac{u(R)}{R} \right| = \left| \frac{u(U)}{U} \right| + \left| \frac{u(I)}{I} \right|$$

$$\left| \frac{u(R)}{R} \right| = \left| \frac{0,25 \text{ V}}{9,15 \text{ V}} \right| + \left| \frac{0,025 \text{ A}}{0,821 \text{ A}} \right| = 0,0578 \Rightarrow \underline{5,78\%}$$

- Ermittlung des absoluten Fehlers

$$u(R) = R \cdot \left| \frac{u(R)}{R} \right| = 11,1443 \Omega \cdot 5,78\% = \underline{0,644 \Omega}$$

Ergebnisdarstellung

$$R = (11,14 \pm 0,65) \Omega$$

Beispiel 4.3: Messung der Brennweite einer dünnen Linse

Die Brennweite f einer dünnen Linse kann berechnet werden, wenn für eine optische Abbildung mit dieser Linse Gegenstandsweite g und Bildweite b bekannt sind.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{oder} \quad f = \frac{g \cdot b}{g + b}$$

Die Gegenstandsweite g und die Bildweite b sind je nach Messung nicht unabhängig voneinander. Sie können z.B. auch aus den Messungen von dem Gegenstandsort l_1 , dem Linsenort l_2 und dem Bildort l_3 bestimmt werden. (Bezugspunkt für Messung von l beliebig)

Setzt man für g und b den Gegenstandsort, Linsenort und Bildort ein, so erhält man

$$g = l_2 - l_1 \quad \text{bzw.} \quad b = l_3 - l_2.$$

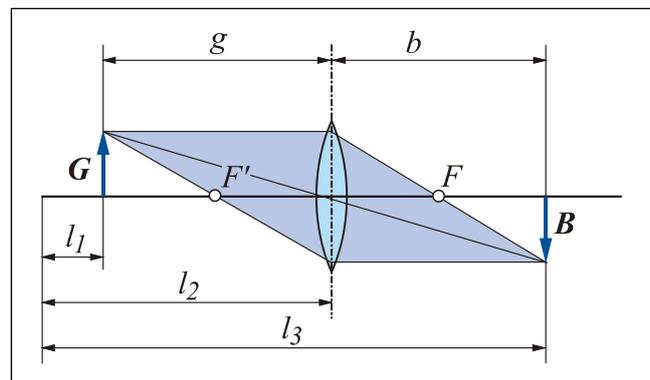


Bild 4.4: Skizze zur Brennweitenbestimmung

Eingesetzt in die Ausgangsgleichung ergibt das:

$$f = \frac{(l_2 - l_1) \cdot (l_3 - l_2)}{l_3 - l_1}.$$

Totales Differential: Für die Rechnung ist es günstig, zunächst das totale Differential zu bilden und erst anschließend den Zusammenhang zwischen g und b zu berücksichtigen:

$$df = \left| \frac{\partial f}{\partial l_1} \cdot dl_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial l_2} \cdot dl_2 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial l_3} \cdot dl_3 \right|$$

$$df = \left| -\frac{(l_3 - l_2)^2}{(l_3 - l_1)^2} \cdot dl_1 \right| + \left| \frac{(l_3 - l_2)^2 - (l_2 - l_1)^2}{(l_3 - l_1)^2} \cdot dl_2 \right| + \left| \frac{(l_2 - l_1)^2}{(l_3 - l_1)^2} \cdot dl_3 \right|$$

Nach Ersetzen der Differentiale df und dl_i durch die Abweichungen $u(f)$ und $u(l_i)$ und dem Einsetzen von g und b ergibt sich:

$$u(f) = \left| -\frac{b^2}{(g+b)^2} \cdot u(l_1) \right| + \left| \frac{b^2 - g^2}{(g+b)^2} \cdot u(l_2) \right| + \left| \frac{g^2}{(g+b)^2} \cdot u(l_3) \right| .$$

Für Abbildungen mit $g \approx b$ wirkt sich demnach eine Abweichung (z.B. bei der Scharfeinstellung des Bildes) von l_2 kaum auf die Bestimmung von f aus.

Zahlenbeispiel:

- Bankmaßstab für abgelesene Werte $l_1 = 203,2 \text{ mm}$
 $l_2 = 432,5 \text{ mm}$
 $l_3 = 689,7 \text{ mm}$
- Berechnung von g und b $g = l_2 - l_1 = \underline{229,3 \text{ mm}}$ $b = l_3 - l_2 = \underline{257,2 \text{ mm}}$
- Berechnung der Brennweite f $f = \frac{g \cdot b}{g + b} = \underline{121,225 \text{ mm}}$

Messunsicherheiten:

- Ablesegenauigkeit für alle l_i $l_i = \pm 1 \text{ mm}$ $u_z(l_1) = u_z(l_3) = \pm 1 \text{ mm}$
- Abweichung der Scharfeinstellung $l_2 = \pm 2 \text{ mm}$ $u_z(l_2) = \pm 3 \text{ mm}$
- Systematische Abweichung (vgl. Garantiefehlergrenzen S. 55)
 $u_s(l_i) = \pm 0,2 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot l$ $u_s(l_1) = \pm (0,2 + 0,10) \text{ mm} = \pm 0,3016 \text{ mm}$
 $u_s(l_2) = \pm (0,2 + 0,22) \text{ mm} = \pm 0,4163 \text{ mm}$
 $u_s(l_3) = \pm (0,2 + 0,35) \text{ mm} = \pm 0,5449 \text{ mm}$
- gesamte Messunsicherheit
 $u(l_i) = u_z(l_i) + u_s(l_i)$ $u(l_1) = \pm 1,3016 \text{ mm}$
 $u(l_2) = \pm 3,4163 \text{ mm}$
 $u(l_3) = \pm 1,5449 \text{ mm}$

$$u(f) = |u(a)| + |u(b)| + |u(c)|$$

$$u(a) = \left| -\frac{b^2}{(g+b)^2} \cdot u(l_1) \right| = \left| -\frac{(257,2 \text{ mm})^2}{(486,5 \text{ mm})^2} \cdot 1,3016 \text{ mm} \right| = 0,363 \text{ mm}$$

$$u(b) = \left| \frac{b^2 - g^2}{(g+b)^2} \cdot u(l_2) \right| = \left| \frac{(257,2 \text{ mm})^2 - (229,3 \text{ mm})^2}{(486,5 \text{ mm})^2} \cdot 3,4163 \text{ mm} \right| = 0,196 \text{ mm}$$

$$u(c) = \left| \frac{g^2}{(g+b)^2} \cdot u(l_3) \right| = \left| \frac{(229,3 \text{ mm})^2}{(486,5 \text{ mm})^2} \cdot 1,5449 \text{ mm} \right| = 0,343 \text{ mm}$$

$$\Sigma = 0,903 \text{ mm}$$

Relative Messunsicherheit: $\frac{u(f)}{f} = \frac{0,904 \text{ mm}}{121,23 \text{ mm}} = \underline{0,007448} \Rightarrow \underline{0,745\%}$

Ergebnisdarstellung:

$$f = (121,2 \pm 0,9) \text{ mm}$$

4.1.3 Messunsicherheit einer Messwertfolge

Eine Folge von Ergebnissen einer **direkten Messung** einer Digitalstoppuhr (Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels, s_T -Standardabweichung von T) ist in **Tabelle 4.1** dargestellt.

i,n	T_i / s	\bar{T} / s	s_T / s	i,n	T_i / s	\bar{T} / s	s_T / s
1	3,23			26	3,18	3,311	0,0695
2	3,35	3,290	0,0600	27	3,20	3,307	0,0713
3	3,43	3,337	0,0785	28	3,33	3,308	0,0701
4	3,29	3,325	0,0672	29	3,28	3,307	0,0690
5	3,30	3,320	0,0590	30	3,28	3,306	0,0680
6	3,35	3,325	0,0539	31	3,27	3,305	0,0671
7	3,35	3,329	0,0500	32	3,33	3,305	0,0662
8	3,22	3,315	0,0586	33	3,12	3,299	0,0725
9	3,28	3,311	0,0559	34	3,21	3,297	0,0729
10	3,34	3,314	0,0534	35	3,34	3,298	0,0722
11	3,38	3,320	0,0541	36	3,22	3,296	0,0723
12	3,47	3,333	0,0662	37	3,28	3,296	0,0714
13	3,27	3,328	0,0655	38	3,24	3,294	0,0710
14	3,36	3,330	0,0635	39	3,32	3,295	0,0701
15	3,37	3,333	0,0620	40	3,28	3,295	0,0693
16	3,35	3,333	0,0600	41	3,41	3,297	0,0707
17	3,20	3,326	0,0661	42	3,16	3,294	0,0729
18	3,25	3,322	0,0664	43	3,37	3,296	0,0729
19	3,42	3,327	0,0682	44	3,42	3,299	0,0744
20	3,30	3,326	0,0666	45	3,33	3,299	0,0737
21	3,22	3,320	0,0687	46	3,46	3,303	0,0766
22	3,33	3,321	0,0671	47	3,38	3,305	0,0765
23	3,23	3,317	0,0681	48	3,34	3,305	0,0756
24	3,22	3,315	0,0670	49	3,40	3,307	0,0763
25	3,33	3,316	0,0657	50	3,39	3,309	0,0764

Tabelle 4.1: Messwertfolge bei einem mathematischen Pendel

Die Tabelle enthält neben der Nummer der Messung i bzw. der damit identischen Zahl der Messungen in der laufenden Folge n , den Messwerten $x_i = T_i$, sowie fortlaufend den linear zeitlichen Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \tag{4.8}$$

Aus der graphischen Darstellung dieser Messwertfolge im **Bild 4.1** erkennt man die gleichmäßige Streuung der Einzelmesswerte x_i und die mit wachsendem n zunehmende Annäherung des Mittelwertes an einen Grenzwert, den Erwartungswert x_E (**Bild 4.2**):

$$x_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} x_i . \tag{4.9}$$

Ohne systematische Abweichung ist der Erwartungswert gleich dem wahren Wert. Mit x_E lässt sich die zufällige Abweichung u'_{Zi} einer einzelnen Messung angeben:

$$u'_{Zi} = x_i - x_E . \tag{4.10}$$

Stehen nicht unendlich viele Messungen zur Verfügung, so erhält man die scheinbare zufällige Abweichung der i -ten Einzelmessung aus

$$u_{Zi} = x_i - \bar{x} . \tag{4.11}$$

Für beide zufälligen Abweichungen gilt, wie man durch Einsetzen nachweisen kann,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u'_{Zi} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n u_{Zi} = 0 . \tag{4.12}$$

Die zufälligen Abweichungen führen zur **Streuung der Messwerte**. Als quantitatives Maß für die Streuung wird der Erwartungswert der **Quadrate der zufälligen Abweichungen** der Einzelwerte, die **Varianz**, definiert:

$$\sigma_x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{Zi}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_E)^2 \tag{4.13}$$

und als **Standardabweichung**

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} . \tag{4.14}$$

Unterteilt man den Bereich der Messwerte x_i in j_{max} *Intervalle gleicher Breite* Δx , so kann man die *Häufigkeit* h_j angeben, mit der die Messwerte in einem Wertebereich $a_j \leq x_i \leq a_{j+1}$ liegen. Die **Häufigkeitsverteilung** der Messwerte aus **Tabelle 4.1** ist in **Tabelle 4.2** und im **Bild 4.5** als **Histogramm** graphisch dargestellt.

Es zeigt sich, dass kleine Abweichungen von dem Schätzwert für x_E häufiger auftreten als größere. Daraus resultiert, dass man die beste Schätzung erhält, wenn

$$Q_{min} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_E)^2 \rightarrow \min \tag{Vgl. S. 35}$$

erfüllt ist.

j	a_j / s	h_j
1	3,05	0
2	3,10	1
3	3,15	2
4	3,20	10
5	3,25	9
6	3,30	11
7	3,35	10
8	3,40	5
9	3,45	2
10	3,50	0

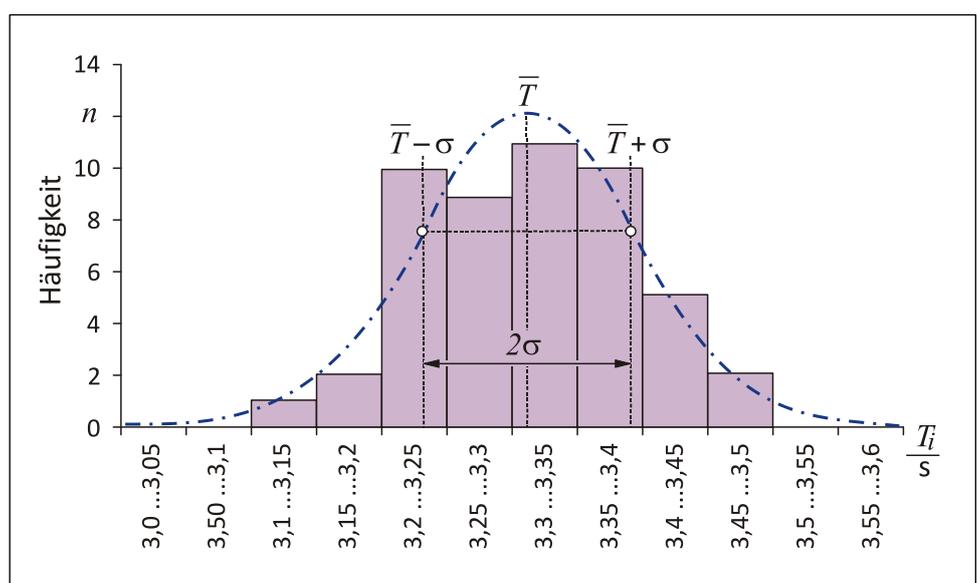


Tabelle 4.2: Wertetabelle

Bild 4.5: Darstellung der Häufigkeitsverteilung, **Histogramm**

Aus $dQ / dx_E = 0$ folgt sofort das arithmetische Mittel nach Gleichung (4.8) als bester Schätzwert für x_E . Diese Methode wird nach Gauß die „**Methode der kleinsten Quadrate**“ genannt (Vergleiche auch **Abschnitt 4.2**).

Analog der Näherung des Erwartungswertes durch das arithmetische Mittel bei einer endlichen Anzahl von Messwerten erfolgt die Definition der **Varianz für eine endliche Anzahl von Messwerten für die Größe x** :

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \tag{4.15}$$

Die Größe s_x heißt **Standardabweichung der Stichprobe**

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \tag{4.16}$$

und stellt den sogenannten „**erwartungsgetreuen**“ Schätzwert für σ_x dar. Der Faktor $n - 1$ bedeutet die Normierung der Fehlersumme auf die Anzahl der Wiederholungsmessungen.

In **Tabelle 4.1** ist diese Standardabweichung s_x als s_T für die jeweils n ersten Messwerte fortlaufend angegeben.

Mit dem Übergang zu $n \rightarrow \infty$ und einer infinitesimalen Intervallbreite dx erhält man eine **Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x)$** für das Auftreten eines kontinuierlich verteilten Messwertes x in diesem Intervall, die als **Gaußsche Normalverteilung** bezeichnet wird (**Beispiel Bild 4.5**)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{4.17}$$

μ ist der **Zentralwert** der Verteilung, σ charakterisiert den **Abstand der Wendepunkte** dieser Funktion vom Zentralwert.

Für diskrete Messwerte x_i ist μ der Erwartungswert x_E und σ die Standardabweichung s_x .

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert x_i in einem vorgegebenen Bereich $a \leq x \leq b$ auf der x -Achse liegt, benötigt man das Integral über die Dichtefunktion (**Verteilungsfunktion der Gaußverteilung, Gaußsches Fehlerintegral oder Fehlerintegral**):

Bereich a bis b	Anteil der Messwerte / %
$-\infty \dots \mu - \sigma$	15,9
$-\infty \dots \mu$	50,0
$-\infty \dots \mu + \sigma$	84,1
$\mu - 1\sigma \dots \mu + 1\sigma$	68,3
$\mu - 2\sigma \dots \mu + 2\sigma$	95,4
$\mu - 3\sigma \dots \mu + 3\sigma$	99,7

$$\Phi = \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

mit $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$

oder $x = \mu + t \cdot \sigma.$ (4.18)

Tabelle 4.3: Verteilungsfunktion der Gaußverteilung

Zerlegt man eine Folge x_i in zwei Teilfolgen, so gelten folgende Aussagen:

Für jede Teilfolge lässt sich ein Mittelwert bilden und so die Abweichung des Mittelwertes einer Folge von Messwerten bestimmen. Damit erhält man für die Messunsicherheit des Mittelwertes einer Messwertfolge $s_{\bar{x}}$.

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot s_x = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.19)$$

Diese Definition wird als **Standardabweichung des Mittelwertes** oder **Studentfehler** bezeichnet.

Unter Beachtung der statistischen Verteilung der Messwerte folgt daraus der Vertrauensbereich des Mittelwertes

$$\bar{x} \pm t \cdot s_{\bar{x}} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad (4.20)$$

t	Statistische Sicherheit / %
1	68,3
2	95,4
3	99,7

Der Wert der Zahl t gibt die statistische Sicherheit an, mit der der wahre Wert zwischen der unteren $\bar{x} - t \cdot s_{\bar{x}}$ und oberen Vertrauensgrenze $\bar{x} + t \cdot s_{\bar{x}}$ liegt.

4.1.4 Messunsicherheit einer Folge bei indirekter Messung

Zur Bestimmung einer Größe Z werden die Größe X und die Größe Y gemessen, es ergibt sich außer den x_i noch eine von Werten y_i mit Mittelwert und Erwartungswert. Man kann für den Sonderfall, dass der Zusammenhang $Z = Z(X, Y)$ linear ist, eine neue mittelbare Größe

$$Z = a \cdot X + b \cdot Y + C$$

definieren und den Wert

$$z_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i + C$$

als Wert in der Folge zur Bestimmung von Z auffassen. Die Konstanten, die die Größen X und Y zur mittelbaren Größe Z linear verknüpfen, charakterisieren den physikalischen Zusammenhang. Einfach ergibt sich auch die Beziehung zwischen den Erwartungswerten

$$z_E = a \cdot x_E + b \cdot y_E + C$$

und analog auch die **Varianz**:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \lim_{1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - z_E)^2 \\ &= a^2 \cdot \sigma_x^2 + b^2 \cdot \sigma_y^2 + \lim_{1 \rightarrow \infty} \frac{2a \cdot b}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_E) \cdot (y_i - y_E) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Der folgende Ausdruck heißt **Kovarianz von X und Y**,

$$\text{cov}(x, y) = \lim_{1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_E) \cdot (y_i - y_E) \quad (4.22)$$

und der folgende Ausdruck ist der **Korrelationskoeffizient**.

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (4.23)$$

Für endliche Reihen wird $x_i - x_E$ wieder $u_Z(x) = x_i - \bar{x}$ und analog $y_i - y_E$ auch $u_Z(y) = y_i - \bar{y}$. Mit $\rho \rightarrow r$ bei diesem Übergang erhält man den **Korrelationskoeffizienten** (nach Pearson) aus

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n u_Z(x_i) \cdot u_Z(y_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_Z^2(x_i) \cdot \sum_{i=1}^n u_Z^2(y_i)}} \quad (4.24)$$

Der Korrelationskoeffizient kann Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Es bedeutet:

- $r = 0$: keine Korrelation zwischen x_i und y_i ,
- $r = +1$: gleichsinnige strenge Korrelation,
- $r = -1$: ungleichsinnige (entgegengesetzte) strenge Korrelation.

Für den Fall $r = 0$, das heißt keine Korrelation zwischen den x_i und y_i , lässt sich folgendes Sonderproblem behandeln:

Ausgehend von Gleichung (4.21), erhält man für den Fall endlicher Messwertfolgen die Zusammensetzung der Standardabweichung der einzelnen Folgen bei der indirekten Messung:

$$s_Z^2 = a^2 \cdot s_x^2 + b^2 \cdot s_y^2 + 2a \cdot b \cdot s_x \cdot s_y \cdot r \quad (4.25)$$

Für $r = 0$ entfällt das gemischte Glied in der Summe (4.25). Nimmt man bei einer indirekten Messung einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der gesuchten Größe Z und den mit Abweichungen (der Gaußschen Normalverteilung entsprechend) behafteten Größen X, Y in der Form $Z = Z(X, Y)$ an, dann erhält man analog zur Gleichung (4.25) mit $r = 0$ auch einen Näherungswert für die Standardabweichung des gesuchten Wertes Z :

$$s_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 \cdot s_x^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 \cdot s_y^2} \quad (4.26)$$

Diese Gleichung, die die Standardabweichung bedingter Beobachtungen zur Standardabweichung des Endwertes zusammenfügt, heißt **Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz**.

4.1.5 Vertrauensbereiche

Der im **Abschnitt 4.1.3** mit der Gleichung (4.20) bestimmte **Vertrauensbereich des Mittelwertes** (auch **Konfidenzintervall** genannt),

$$\bar{x} \pm t \cdot s_{\bar{x}} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad ,$$

gibt die **Messunsicherheit des Mittelwertes** an (seine Abweichung vom wahren Wert). Der Wert t zur Festlegung des Vertrauensbereiches bestimmt dabei die statistische Sicherheit S , mit der der wahre Wert zwischen der unteren und der oberen Vertrauensgrenze liegt.

Hinweis:

Im Praktikum ist dieser Wert $t = 2$. Dabei sorgt die statistische Sicherheit S , dass der wahre Wert im Bereich von 95% liegt.

Das heißt aber auch, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit $1 - S$ dafür 5% beträgt.

Diese Aussage resultiert aus dem Gaußschen Fehlerintegral (*Integral über die Gaußsche Normalverteilung*, nach Gleichung (4.18)) und gilt damit nur für den Fall $n \rightarrow \infty$ und wenn die Verteilung der Messwerte der Gültigkeit dieser Funktion gehorcht.

*Bei einer endlichen Anzahl von Werten treten starke Abweichungen von der Normalverteilung auf und damit auch zwischen σ und s . Anstatt der Gaußverteilung muss die **Student-t-Verteilung** angewendet werden. Diese Verteilung ist von der Anzahl der Messungen n abhängig.*

Für $n \rightarrow \infty$ geht die *Student-t-Verteilung* in die Normalverteilung über. Gibt man eine statistische Sicherheit S oder eine Irrtumswahrscheinlichkeit $1 - S$ vor, so bestimmt der standardisierte Parameter t das Vertrauensintervall gemäß der Gleichung (4.20). Die nicht elementar berechenbaren Werte für t sind für $S = 95\%$ und $S = 99\%$ in **Tabelle 4.4** dargestellt.

Anzahl n der Einzelwerte	Praktikum $S = 95\%$	$S = 99\%$	Anzahl n der Einzelwerte	Praktikum $S = 95\%$	$S = 99\%$
2	12,71	63,66	22	2,07	2,81
3	4,30	9,93	24	2,06	2,79
4	3,18	5,84	26	2,05	2,77
5	2,78	4,60	28	2,04	2,76
6	2,57	4,03	30	2,03	2,74
8	2,37	3,50	40	2,02	2,70
10	2,26	3,25	50	2,01	2,68
12	2,20	3,11	60	2,00	2,66
14	2,16	2,98	80	1,99	2,64
16	2,13	2,95	100	1,98	2,63
18	2,11	2,90	200	1,97	2,60
20	2,09	2,86	> 200	1,96	2,58

Tabelle 4.4: Werte der *Student-t-Verteilung* bei verschiedenen statistischen Sicherheiten

4.2 Angabe der Messergebnisse

Das endgültige Messergebnis einer Messreihe mit überwiegend zufälligem Abweichungsanteil wird durch den Mittelwert und den Vertrauensbereich angegeben, wobei für letzteren die statistische Sicherheit S bzw. die Irrtumswahrscheinlichkeit $1 - S$ festzulegen ist.

Soll die Angabe des Ergebnisses in der Einheit der Messgröße X erfolgen, wählt man als Schreibweise

$$X = x \pm u_z(X) = \bar{x} \pm t \cdot s_{\bar{x}} \quad (4.27)$$

Bevorzugt man dagegen die Angabe der Messunsicherheit als relative Größe, ist das Ergebnis in der Form

$$X = \bar{x} \cdot \left(1 \pm \frac{u_z(x)}{\bar{x}} \right) = \bar{x} \cdot \left(1 \pm \frac{t \cdot s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \right) \quad (4.28)$$

anzugeben.

Falls die systematischen Anteile der Abweichung u_s nicht erfassbar, d.h. unbekannt bzw. nicht messbar sind, ist ihr abschätzbarer Wert zu berücksichtigen. Im Falle $|u_s(X)| < |u_z(X)|$ summiert man als praktikable Näherung die beiden Abweichungsanteile und erhält als endgültiges Messergebnis

$$X = \bar{x} \pm (|u_s(X)| + |u_z(X)|) . \quad (4.29)$$

Liegen die systematischen Fehleranteile in der Größenordnung der zufälligen Fehleranteile oder übertreffen diese gar, so ist auf eine statistische Analyse der Abweichungen zu verzichten und eine Abschätzung für den Wert von $u_z(X)$ vorzunehmen.

Alle Angaben der Messunsicherheit sind in der Regel aufzurunden. Die endgültigen Ergebnisse rundet man auf **signifikante Stellen**, d. h. es wird nur noch die Stelle angegeben, in der sich die Messunsicherheit bemerkbar macht.

Beispiel 4.4: Mittlere Schwingungsdauer \bar{T} eines mathematischen Pendels

Die mittlere Schwingungsdauer \bar{T} eines mathematischen Pendels wurde aus einer mit einer quarzstabilisierten Digitalstoppuhr ermittelten Messwertfolge berechnet (*Messwerte dazu finden Sie in **Tabelle 4.1***).

- Mittelwert: $\bar{T} = 3,3076 \text{ s}$
- Standardabweichungen: $s_T = \pm 0,07996 \text{ s}$
 $s_{\bar{T}} = \pm 0,01131 \text{ s}$
- Vertrauensbereich: $S = 95\%$ (für $n = 50$ folgt aus **Tabelle 4.4**)
 $t = 2,01$
- zufällige Abweichung: $u_z(T) = \pm 2,01 \cdot 0,01131 \text{ s} = \pm \underline{0,02273 \text{ s}}$
- systematische Abweichung: $u_s(T) = \pm \underline{0,01 \text{ s}}$
(*kleinste angezeigte Stelle der verwendeten elektronischen Messuhr, Drift vernachlässigbar*)
- absolute Messunsicherheit: $u(T) = u_z(T) + u_s(T) = (0,02273 + 0,01) \text{ s} = \underline{0,03273 \text{ s}}$
- relative Messunsicherheit: $\frac{u(T)}{T} = \underline{0,00990} \approx \underline{1\%}$

Ergebnisdarstellung:

$$T = (3,31 \pm 0,04) \text{ s}$$

Beispiel 4.5: Brennweite einer dünnen Linse

Die Brennweite einer dünnen Linse wurde aus wiederholten und unabhängigen Messungen von Gegenstands- und Bildweite ermittelt (*jeweils 15 Messungen, ohne etwas an der Position von Gegenstand oder Bild zu verändern*). Die Messergebnisse sind unkorreliert:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{g \cdot b}{g + b} .$$

Als Messgerät wurde ein Bankmaßstab verwendet. Die Berechnung von Mittelwerten und Standardabweichungen kann u.a. auch mit dem Statistikprogramm eines Taschenrechners erfolgen (*trotzdem im Protokoll angeben*).

- Mittelwerte: $\bar{g} = 119,68 \text{ cm}$ $\bar{b} = 97,72 \text{ cm}$ \sim $\bar{f} = \underline{53,795 \text{ cm}}$
- Standardabweichung des Mittelwertes: $s_{\bar{g}} = \pm 0,054 \text{ cm}$ $s_{\bar{b}} = \pm 0,07 \text{ cm}$

Die Berechnung der Standardabweichung $s_{\bar{f}}$ der Brennweite \bar{f} (für den Fall unkorrelierter Messwerte nach Gleichung (4.26)) ergibt:

$$s_{\bar{f}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial g} \cdot s_{\bar{g}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \cdot s_{\bar{b}}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial f}{\partial g} = \frac{\bar{b}^2}{(\bar{g} + \bar{b})^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\bar{g}^2}{(\bar{g} + \bar{b})^2}$$

$$s_{\bar{f}} = \sqrt{\left(\frac{\bar{b}^2}{(\bar{g} + \bar{b})^2} \cdot s_{\bar{g}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{g}^2}{(\bar{g} + \bar{b})^2} \cdot s_{\bar{b}}\right)^2} = \underline{0,0239 \text{ cm}}$$

Die systematische Abweichung erhält man aus den Garantiefehlergrenzen für den Bankmaßstab (Siehe **S. 55** und vgl. **S. 26**):

$$u_s(l) = 0,2 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot l \quad u_s(g) = \pm \underline{0,072 \text{ cm}} \quad u_s(b) = \pm \underline{0,097 \text{ cm}}$$

Beide Anteile bilden die systematische Abweichung von \bar{f} (entsprechend **Abschnitt 4.1.2**)

$$u_s(f) = \left| \frac{\partial f}{\partial g} \cdot u_s(g) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \cdot u_s(b) \right|$$

$$u_s(f) = \left| \frac{\bar{b}^2}{(\bar{g} + \bar{b})^2} \cdot u_s(g) \right| + \left| \frac{\bar{g}^2}{(\bar{g} + \bar{b})^2} \cdot u_s(b) \right| = \underline{0,0439 \text{ cm}}$$

Berechnung der Messunsicherheit ($u_z(f)$) mit $t = 2,145$ für $n = 15$ Werte aus **Tabelle 4.4**).

$$u(f) = u_z(f) + u_s(f)$$

$$u(f) = t \cdot s_{\bar{f}} + u_s(f) = 2,145 \cdot 0,0239 \text{ cm} + 0,0439 \text{ cm} = \underline{0,0951 \text{ cm}}$$

$$\frac{u(f)}{f} = 0,001767 = \underline{0,177\%}$$

Ergebnisdarstellung:

$$f = (53,8 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Der im Praktikum angebotene Versuch zur Brennweitenbestimmung schreibt eine andere Versuchsdurchführung vor, damit ändert sich auch die Auswertung und die Art der Bestimmung der maximalen Messunsicherheit.

4.3 Ausgleich indirekter Messung (*lineare Regression*)

In den Betrachtungen zum Ausgleich von direkten Beobachtungen im **Abschnitt 4.1.3** ging es darum, aus einer Messreihe x_1, \dots, x_n einen Wert abzuschätzen, der als wahrscheinlichster Wert diese Messreihe repräsentiert und um den die Einzelmesswerte nach einer Normalverteilung streuen. Ergebnis der Näherung war der arithmetische Mittelwert nach Gleichung (4.8) und als Maß für die Streuung des Mittelwertes die Standardabweichung des Mittelwertes nach Gleichung (4.19).

In diesem Abschnitt wird der Fall behandelt, dass zwischen der einen **gemessenen Größe X** und der anderen **gemessenen Größe Y ein funktioneller Zusammenhang** besteht.

$$Y = f(X), \text{ oder für einzelne Messwerte } y_i = f(x_i), i = 1, \dots, n \quad (4.30)$$

In der Messung werden also zu den X -Werten x_i , mit denen ein ganzer Bereich abgetastet wird, die dazugehörigen Y -Werte y_i bestimmt. Aus den vorliegenden Wertepaaren (x_i, y_i) sind Aussagen über die Funktion f zu gewinnen. Erschwerend ist die Tatsache, dass die Messwerte x_i und y_i zufällige Abweichungen aufweisen können. Darüber hinaus ist in der Regel die Zahl der Gleichungen (*durch die Anzahl der Messwertpaare vorgegeben*) größer als die Zahl der aus dem Gleichungssystem (4.30) für die Funktion f zu bestimmenden Konstanten, d. h., jede herausgegriffene Teilmenge von Wertepaaren führt zu anderen Lösungen.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass nur die Y -Werte zufällige Abweichungen aufweisen und die X -Werte genau bekannt sind. (*Die zufälligen Abweichungen der X -Werte sind klein gegen die zufälligen Abweichungen der Y -Werte.*). Damit lassen sich die scheinbar zufälligen Abweichungen wie folgt definieren:

$$u_{zi}(y_i) = y_i - f(x_i). \quad (4.31)$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate wird die Extremalforderung

$$Q = \sum_{i=1}^n u_{zi}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

Um den mathematischen Aufwand zur Lösung dieser Gleichung zu begrenzen, wird hier nur der Fall der **linearen Abhängigkeit zwischen den Größen X und Y betrachtet**:

$$f(x_i) = y_i = a + b \cdot x_i. \quad (4.32)$$

Damit wird

$$Q = Q(a, b) = \sum (y_i - (a + b \cdot x_i))^2,$$

und die Extremalforderung führt auf

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = 0$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^n y_i - n \cdot a - b \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \quad (4.33)$$

Diese Gleichungen heißen die **Gaußschen Normalgleichungen** und stellen ein Gleichungssystem für die Bestimmung der beiden die lineare Funktion $f(x_i)$ charakterisierenden Größen a und b dar:

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & b &= \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \\
 a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & a &= \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

Aus den Überlegungen im **Abschnitt 4.1** geht hervor, dass die Konstanten genau durch unendlich viele Messungen bestimmt werden können. Bei einer endlichen Anzahl von Messungen erhält man für jede Konstante nur einen Näherungswert und einen von der statistischen Sicherheit abhängigen Vertrauensbereich. Auch in diesem Falle ergibt die Varianz das Quadrat der Standardabweichung:

$$s_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (u_{zi}(y_i))^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - (a + b \cdot x_i))^2
 \tag{4.35}$$

Der Ersatz von $n - 1$ durch $n - 2$ gegenüber der Gleichung (4.16) ist dadurch bedingt, dass die Anzahl der bezüglich n voneinander unabhängigen Wertepaare durch die aus den Messwerten berechneten Parameter a und b um zwei reduziert wurde (sog. *Freiheitsgrade*).

Die Standardabweichung für a und b erhält man aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gleichung (4.26), wobei auf den mathematischen Beweis auf Grund der Übersichtlichkeit verzichtet wird. a und b sind dabei die in Abhängigkeit von y_i schwankenden einzelnen Funktionen aus der Gleichung (4.34).

$$\begin{aligned}
 s_b^2 &= s_y^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial y_i} \right)^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\
 s_a^2 &= s_y^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \right)^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

Hinweise zur praktischen Handhabung:

Ausgleichsrechnungen mittels linearer Regression sind Bestandteil eines jeden wissenschaftlichen Taschenrechners und können mit diesem bestimmt werden. Die Standardabweichungen s_a und s_b für die Koeffizienten a und b sind nicht direkt dem Taschenrechner entnehmbar, jedoch alle zur Berechnung entsprechend der Gleichung (4.36) notwendigen Zwischenergebnisse.

Nichtlineare Zusammenhänge zwischen den Messgrößen X und Y können in einigen Fällen linearisiert und wie beschrieben ausgewertet werden (Siehe dazu **Abschnitt 4.6: Graphische Darstellungen**).

Beispiel 4.6: Bestimmung des Direktionsmomentes

Zur Bestimmung des Direktionsmomentes D eines einseitig eingespannten, senkrecht hängenden Stabes ist die statische Methode (siehe Bild 4.6) angewendet worden. Dabei wird das Drehmoment M durch die Umlenkung von zwei gleichgroßen Gewichtskräften über Rollen tangential an eine Teilkreisscheibe (360° -Winkelmesser, $u_s(\alpha) = 0,4^\circ$) mit dem Radius $R=50,6$ mm ($u_s(R) = 0,03$ mm) erzeugt.

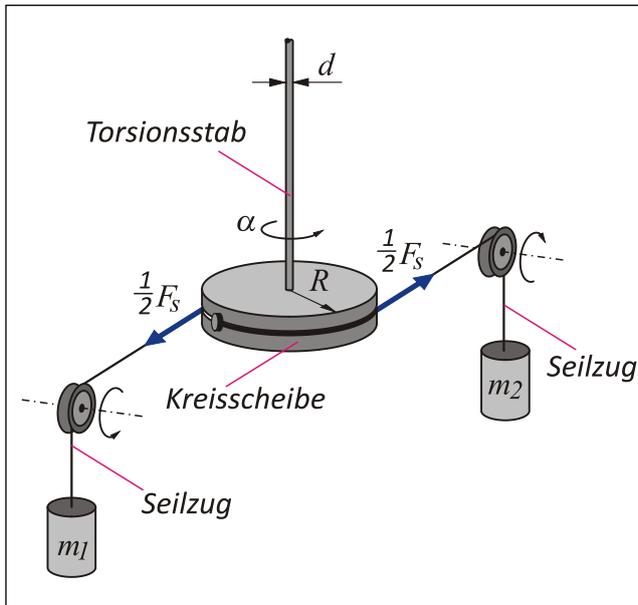


Bild 4.6: Prinzipskizze

i	m_i / g	$\alpha_i / 1^\circ$	α_i / rad
1	20	5,0	0,0873
2	40	9,5	0,1658
3	60	14,5	0,2531
4	80	19,0	0,3316
5	100	25,0	0,4363
6	140	33,0	0,5760
7	180	44,0	0,7679
8	240	59,5	1,0385
9	300	71,0	1,2392

Tabelle 4.5: Messwerttabelle

Der Anstieg b lässt sich (siehe S.44) mit dem Anstiegsdreieck auf einfache Art und Weise bestimmen und beträgt $b = 236$ g. Der Schnittpunkt mit der y -Achse a ist in diesem speziellen Fall gleich Null, da die Funktion genau durch den Koordinatenursprung verläuft. Also berechnet sich das Direktionsmoment D

$$D = g \cdot R \cdot b = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 236 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$D = 117,1471 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$$

Die in Abhängigkeit von den angehängten Massen $m = m_1 + m_2$ ($u_s(m) = 0,32$ g) gemessenen Torsionswinkel α_i sind in der folgenden Messwerttabelle angegeben. Für die Torsion gilt mit dem Direktionsmoment D des Stabes

$$|M| = D \cdot \alpha \text{ und } |M| = m \cdot g \cdot R.$$

Damit ist

$$D = g \cdot R \cdot \frac{m_i}{\alpha_i}.$$

Die Gleichung besteht aus einem konstanten (Fallbeschleunigung g , Radius R) und einem variablen Teil (Masse m und Winkel α). Der funktionale Zusammenhang $m = f(\alpha)$ ist in Bild 4.8 dargestellt. Die allgemeine lineare Ausgleichsfunktion lautet also:

$$y_i = a + b \cdot x_i.$$

Sie liefert den Anstieg b der Funktion und ist

$$b = \frac{\Delta m_i}{\Delta \alpha_i}.$$

Der Torsionswinkel α muss für die Darstellung der o.g. Funktion bzw. für die Berechnung des Direktionsmomentes D stets in **Bogenmaß** umgerechnet werden.

$$\alpha_{\text{Bogenmaß}} = \alpha_{\text{Grad}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Berechnung der Standardabweichungen s_y , s_a und s_b :

i	m_i / g	$\alpha_{i(\text{Bogenma\ss})}$	$\alpha_{i(\text{Bogenma\ss})}^2$	berech. Regressionswert m_i' / g	$(m_i - m_i')^2$
1	20	0,0873	0,0076	20,5949	0,3539
2	40	0,1658	0,0275	39,1303	0,7564
3	60	0,2531	0,0640	59,7252	0,0755
4	80	0,3316	0,1100	78,2606	3,0256
5	100	0,4363	0,1904	102,9744	8,8472
6	140	0,5760	0,3317	135,9262	16,5955
7	180	0,7679	0,5897	181,2350	1,5252
8	240	1,0385	1,0784	245,0791	25,7976
9	300	1,2392	1,5356	292,4474	57,0422
Σ		4,8956	3,9350		114,0192

Tabelle 4.6: Auswertungstabelle

• Nach Gleichung (4.35): $s_y = \sqrt{\frac{1}{9-2} \cdot 114,0192 \text{ g}^2} = \underline{4,0359 \text{ g}}$

• Nach Gleichung (4.36): $s_a = 4,0359 \text{ g} \cdot \sqrt{\frac{3,9350}{9 \cdot 3,9350 - (4,8956)^2}} = \underline{2,3662 \text{ g}}$

$$s_b = 4,0359 \text{ g} \cdot \sqrt{\frac{9}{9 \cdot 3,9350 - (4,8956)^2}} = \underline{3,5786 \text{ g}}$$

Mit $t = 2,315$ für $n = 9$ (nach **Tabelle 4.4**) approximative ergibt sich:

$$u_z(b) = \pm t \cdot s_b = \pm 2,315 \cdot 3,5786 \text{ g} = \underline{8,2844 \text{ g}}$$

Die zufällige Abweichung von R ist hier zu vernachlässigen. So ist die zufällige relative Abweichung von D gleich der zufälligen relativen Abweichung von b .

$$\frac{u_z(D)}{D} = \frac{u_z(b)}{b} \quad \leadsto \quad u_z(D) = \frac{8,2844 \text{ g}}{236 \text{ g}} \cdot 117,1471 \cdot 10^{-3} \text{ Nm} = \underline{4,1122 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}}$$

Die systematische Abweichung wird in der bekannten Form der Abschätzung der Maximalabweichungen zusammengesetzt:

$$\left| \frac{u_S(D)}{D} \right| = \left| \frac{u_S(R)}{R} \right| + \left| \frac{u_S(\alpha)}{\alpha} \right| + \left| \frac{u_S(m)}{m} \right| .$$

Für α_i und m_i kann eine mittlere Messung ($m = (100 \pm 0,32) \text{ g}$ bzw. $\alpha = (25 \pm 0,4)^\circ$) angenommen werden.

$$u_S(D) = \pm 117,1471 \cdot 10^{-3} \text{ Nm} \cdot \frac{0,03 \text{ mm}}{50,6 \text{ mm}} + \frac{0,4^\circ}{25^\circ} + \frac{0,32 \text{ g}}{100 \text{ g}} = \underline{2,3187 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}} .$$

Ergebnisdarstellung:

$$D = (117,1 \pm 6,5) \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$$

\sim

$$\frac{u_z(D)}{D} = 5,6\%$$

Das Direktionsmoment D eines einseitig eingespannten, senkrecht hängenden Stabes beträgt $D=117,1 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$. Die bei der Messung auftretende absolute Abweichung ist $\pm 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$. In der Ergebnisdarstellung wird erst jetzt auf die signifikanten Stellen gerundet, wobei die absolute Abweichung aufgerundet werden sollte.

4.4 Der gewichtete Mittelwert

Wird eine Messgröße durch mehrere Messungen x_i mit unterschiedlichen Messunsicherheiten $u(x_i)$ bestimmt, so lässt man die Einzelmessungen mit größerer Messabweichung mit einem geringeren Gewichtungsfaktor g_i in das Gesamtergebn eingehen. Als gewichteten Mittelwert verwendet man

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_i} \quad (4.37)$$

mit den Gewichtungsfaktoren

$$g_i = \frac{1}{(u(x_i))^2} . \quad (4.38)$$

Die Messunsicherheiten im gewichteten Mittelwert sind

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n g_i}} . \quad (4.39)$$

Bei auf unterschiedlicher Weise ermittelten Messreihen mit verschiedenen Standardabweichungen ist der gewichtete Mittelwert ebenfalls anwendbar, dabei werden die jeweiligen Messwerte durch die Mittelwerte und die Messabweichungen durch die Standardabweichungen ersetzt.

Beispiel 4.7: Gewichteter Mittelwert

Die Ermittlung dreier unterschiedlicher Messungen eines Widerstandes ergaben:

$$R_1 = (11 \pm 1) \Omega$$

$$R_2 = (12 \pm 1) \Omega$$

$$R_3 = (10 \pm 3) \Omega$$

- Bestimmung der Gewichtsfaktoren:

$$g_1 = \frac{1}{(u(R_1))^2} = \frac{1}{(1)^2} = \underline{1,000 \Omega^{-2}}$$

$$g_2 = \frac{1}{(u(R_2))^2} = \frac{1}{(1)^2} = \underline{1,000 \Omega^{-2}}$$

$$g_3 = \frac{1}{(u(R_3))^2} = \frac{1}{(3)^2} = \underline{0,111 \Omega^{-2}}$$

- Gewichteter Mittelwert:

$$\bar{R} = \frac{g_1 \cdot R_1 + g_2 \cdot R_2 + g_3 \cdot R_3}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{11 \Omega^{-1} + 12 \Omega^{-1} + 1,11 \Omega^{-1}}{2,111 \Omega^{-2}} = \underline{11,4211 \Omega}$$

- Messunsicherheit:

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{g_1 \cdot (R_1 - \bar{R})^2 + g_2 \cdot (R_2 - \bar{R})^2 + g_3 \cdot (R_3 - \bar{R})^2}{(n-1) \cdot (g_1 + g_2 + g_3)}}$$

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1 \Omega^{-2} \cdot (-0,42 \Omega)^2 + 1 \Omega^{-2} \cdot (0,58 \Omega)^2 + 0,111 \Omega^{-2} \cdot (-1,42 \Omega)^2}{2 \cdot 2,111 \Omega^{-2}}} = \underline{0,4178 \Omega}$$

Ergebnisdarstellung:

$$\bar{R} = (11,42 \pm 0,42) \Omega$$

Der Messwert R_3 hat den geringsten Einfluss auf das Endergebnis.

4.5 Zählstatistik

4.5.1 Zählstatistik seltener Ereignisse

Wenn man z.B. mehrmals unter unveränderten Versuchsbedingungen die Anzahl der Zerfallsereignisse während der Zeitdauer Δt bei einem langlebigen radioaktiven Präparat bestimmt, so wird man im allgemeinen verschiedene Anzahlwerte erhalten, die um einen Mittelwert streuen. Es soll nun die Wahrscheinlichkeit angegeben werden, mit der während eines Zeitintervalls Δt genau n Zählereignisse registriert werden.

Dazu wird zunächst das Zeitintervall Δt in m gleich große Teilintervalle dt zerlegt. Die Zahl m soll so groß sein, dass die Wahrscheinlichkeit für zwei oder mehr Zerfallsereignisse während dt vernachlässigbar ist. Es genügt dann, die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Zerfall während des Zeitintervalls dt zu betrachten. Diese hängt von dt und damit von m ab und wird mit p_m bezeichnet.

Die Bestimmung der Anzahl der Zählereignisse während Δt kann unter der genannten Voraussetzung als ein m -stufiges Experiment aufgefasst werden, bei dem in jeder Stufe entweder ein Zerfall stattfindet oder nicht. Die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, bei diesem Experiment genau n Zählereignisse zu registrieren, ist durch die Binominalverteilung gegeben:

$$p(n) = \binom{m}{n} \cdot p_m^n \cdot (1 - p_m)^{m-n} \quad (4.40)$$

In Gleichung (4.40) tritt noch die von der Feinheit der Unterteilung abhängige Wahrscheinlichkeit p_m auf. Die vorgenommene Unterteilung war jedoch vollkommen willkürlich. Betrachtet wird deshalb der Erwartungswert \bar{n} für die Anzahl der Zählereignisse im gesamten Zeitintervall Δt :

$$\bar{n} = m \cdot p_m \quad (4.41)$$

Macht man nun die Unterteilung von Δt immer feiner, so wächst m gegen unendlich, während \bar{n} unverändert bleibt. Nach dem Poissonschen Grenzwertsatz folgt dann, dass sich die Binominalverteilung nach Gleichung (4.40) mit wachsendem m der Poissonverteilung

$$p_{\bar{n}}(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} \cdot e^{-\bar{n}} \quad (4.42)$$

nähert (**Bild 4.7**).

Wird also bei gleichbleibenden Zeitintervallen Δt mehrfach die Anzahl n der Zählereignisse bestimmt, so sind die gemessenen Werte poissonverteilt. Beachten Sie, dass die Poissonverteilung nicht symmetrisch zum Erwartungswert \bar{n} ist und dass der wahrscheinlichste Wert im allgemeinen von \bar{n} verschieden ausfällt.

Die Standardabweichung σ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert als die positive Wurzel aus dem Erwartungswert der Abweichungsquadratrate:

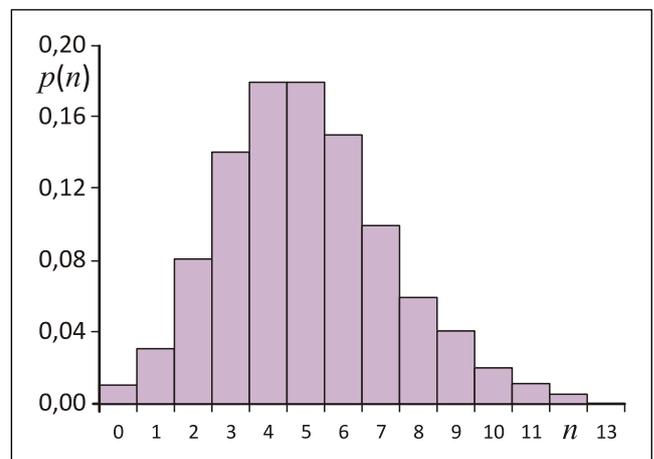


Bild 4.7: Prinzipialskizze

$$\sigma = \sqrt{\sum_n p(n) \cdot (n - \bar{n})^2} \quad (4.43)$$

Für die Standardabweichung der Poissonverteilung ergibt sich:

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} . \quad (4.44)$$

4.5.2 Die Normalverteilung (siehe auch **Abschnitt 4.1.3**)

Ist $\bar{n} \geq 50$, so kann man die Poissonverteilung nach Gleichung (4.42) gut durch die Normal- oder Gaußverteilung approximiert werden.

$$F_{\bar{n},\sigma}(n) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}} . \quad (4.45)$$

Die **Poissonverteilung besitzt nur einen Parameter**, nämlich den Erwartungs- oder Mittelwert \bar{n} . Bei der **Normalverteilung hingegen treten zwei unabhängige Parameter** auf, der Mittelwert \bar{n} und die Standardabweichung σ .

Bei der Bestimmung der Anzahl von Zählereignissen muss die Standardabweichung unverändert bleiben, wenn man von der Poissonverteilung zur Normalverteilung übergeht. Diese Aussage der Gleichung (4.44) gilt deshalb auch, wenn man die Normalverteilung zugrunde legt. Damit wird aus der zweiparametrischen Verteilung (4.45) die einparametrische Verteilung.

$$F_{\bar{n}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \bar{n}}} \cdot e^{-\frac{(n - \bar{n})^2}{2\bar{n}}} \tag{4.46}$$

n	$p_{\bar{n}}(n)$	$F_{\bar{n}}(n)$
25	0,0000	0,0001
30	0,0007	0,0010
35	0,0054	0,0059
40	0,0215	0,0208
45	0,0458	0,0439
50	0,0563	0,0564
55	0,0422	0,0439
60	0,0201	0,0208
65	0,0063	0,0059
70	0,0014	0,0010
75	0,0002	0,0001

Tabelle 4.7: Vergleich zwischen Poisson- und Normalverteilung ($\bar{n} = 50, \sigma = \sqrt{\bar{n}}$).

Beim radioaktiven Zerfall ist es z.B. nur sinnvoll, in Gleichung (4.45) bzw. (4.46) für n natürliche Zahlen einzusetzen. Die Normalverteilung beschreibt jedoch nicht nur die Zählstatistik bei radioaktiven Prozessen, sondern ist praktisch auf jede Zufallsvariable anwendbar, deren Streuung durch voneinander unabhängige Ereignisse verursacht ist. Im Allgemeinen sind die Gleichungen (4.45) bzw. (4.46) also für den ganzen Bereich der reellen Zahlen definiert.

Kann eine Zufallsvariable beliebige reelle Werte annehmen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein ganz bestimmter Wert x_0 auftritt, gleich null. Es ist dann nur sinnvoll, nach der Wahrscheinlichkeit $p(I)$ zu fragen, mit der ein Versuchsergebnis in einem Intervall $I = [a, b]$ liegt. Bei diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen müssen zur Beantwortung dieser Frage die Einzelwahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse in I aufsummiert werden. Bei der kontinuierlichen Normalverteilung erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p(I)$ durch Integration über I :

$$p(I) = \int_a^b F_{\bar{n}}(x) dx \tag{4.47}$$

Die Gleichungen (4.45) und (4.46) geben also nicht direkt eine Wahrscheinlichkeit, sondern vielmehr die Wahrscheinlichkeit pro Einheitsintervall, also eine **Wahrscheinlichkeitsdichte** an. Genau wie man die Masse eines inhomogenen Körpers durch Integration der Dichtefunktion über das betrachtete Volumen erhält, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer Zufallsvariablen in einem bestimmten Intervall liegt, durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte über dieses Intervall.

4.5.3 Betrachtungen zur Messunsicherheit

Die numerische Berechnung des Integrals nach Gleichung (4.47) liefert die Wahrscheinlichkeit p , dass eine Einzelmessung höchstens um Δn vom Mittelwert \bar{n} abweicht. Man erhält die schon aus **Abschnitt 4.1.3** bekannten Ergebnisse:

Δn	p
1σ	0,68
2σ	0,95
3σ	0,99

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Reihe von Zählergebnissen ein Einzelergebnis um mehr als σ vom Mittelwert abweicht, liegt demnach bei 32%. Führt man nur eine einzige Messung mit dem Ergebnis n_1 aus, so kann man umgekehrt schließen, dass ein Mittelwert \bar{n} , der sich in einer längeren Messreihe einstellen würde, mit 68% Wahrscheinlichkeit um nicht mehr als σ vom Einzelergebnis abweichen

würde. Da \bar{n} nicht bekannt ist, wählt man $\sqrt{n_1}$ **als absolute Messabweichung** bei der Bestimmung von \bar{n} . Das Messergebnis für den durch eine einzige Messung bestimmten Mittelwert ist dann

$$\bar{n} = n_1 \pm \sqrt{n_1} \quad (4.48)$$

Die relative Abweichung bei Gl. (4.47) nimmt mit wachsender Anzahl der gemessenen Ereignisse ab:

$$\frac{\Delta\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (4.49)$$

Werden k Einzelmessungen mit den Ergebnissen $n_i (i = 1, \dots, k)$ durchgeführt, kann der Mittelwert als Ergebnis angegeben werden:

$$\bar{n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i \quad (4.50)$$

Die **relative Abweichung dieses Mittelwertes** wird nun nicht durch die Standardabweichung der Einzelmessung, sondern **ausschließlich von der Gesamtzahl der registrierten Zählereignisse** bestimmt.

$$\frac{\Delta\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k n_i}} \neq \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (4.51)$$

Soll beispielsweise eine relative Abweichung von 1% erreicht werden, so müssen insgesamt 10^4 Ereignisse gezählt werden. Dabei spielt es keine Rolle, ob dies in mehreren Einzelexperimenten oder in einem einzigen Experiment geschieht.

4.6 Graphische Darstellung

Graphische Darstellungen veranschaulichen den Zusammenhang zwischen zwei physikalischen Größen X und Y . Sie werden durch Eintragen von Messwerten in Koordinaten- bzw. Funktionspapieren oder durch Schreiber- bzw. Plotterdarstellungen erstellt und erfüllen in der laborpraktischen Arbeit mehrere Aufgaben.

In erster Linie dienen sie zur Veranschaulichung der Messergebnisse und damit gleichzeitig zur Kontrolle und qualitativen Auswertung der Messungen. Bei der Auswertung können aus markanten Kurvenpunkten (*Extremwerte, Schnittpunkte mit vorgegebenen Abszissen- oder Ordinatenwerten, qualitative Änderungen der funktionellen Abhängigkeit u. ä.*) direkt physikalische Größen abgelesen oder berechnet werden.

Bei jeder graphischen Darstellung von Messergebnissen in Koordinatensystemen bilden die Maßzahlen physikalischer Größen die Koordinaten der Messpunkte. Diese Maßzahlen erhält man, wenn der Messwert durch die verwendete Einheit dividiert wird. In das Diagramm sind diese deutlich markiert **durch Kreuze** einzutragen.

Die Koordinatenachsen sind mit einer Skale der physikalischen Größen und mit dem Quotienten aus der aufgetragenen physikalischen Größe und der verwendeten Einheit (**Bild 4.8**) zu beschriften.

Graphische Darstellungen sind grundsätzlich mit einer Funktionsgleichung und einem Diagrammtitel mit entsprechender Nummerierung zu versehen.

4.6.1 Lineare Zusammenhänge der Form $y = a + b \cdot x$

Diese funktionellen Zusammenhänge werden auf Millimeterpapier dargestellt.

Aufgrund von Messungenauigkeiten werden $n > 2$ Messpunkte (x_i, y_i) nicht genau auf einer Geraden liegen. Der vertikale Abstand zwischen dem i -tem Messpunkt und einer willkürlich durch die Messpunkte gelegten Geraden ist d_i . Die Ausgleichsgerade, die die Messwerte am besten beschreibt, erfüllt die Bedingung, dass die Summe der Abstandsquadrate Q minimal wird:

$$Q = \sum_{i=1}^n d_i^2 \rightarrow \min . \quad (\text{Vgl. S. 35})$$

In der Praxis reicht es aus, eine „Ausgleichsgeraden“ empirisch im Diagramm einzuzichnen, so dass die Abweichungen der Messpunkte nach oben und unten sich etwa aufheben.

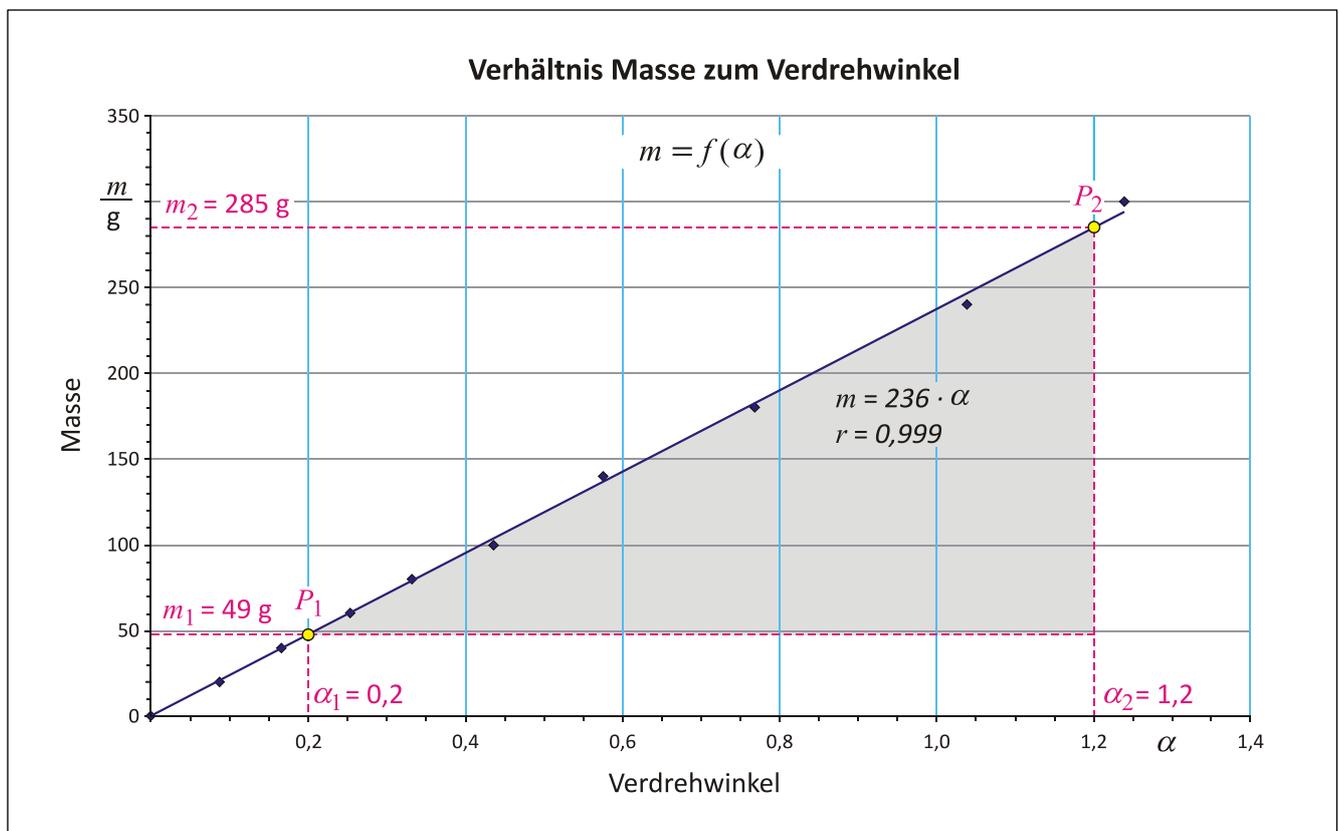


Bild 4.8: Abhängigkeit der Gesamtmasse m vom Verdrehwinkel α

Der Anstieg der Ausgleichsgeraden lässt sich durch Festlegung eines Anstiegsdreiecks bestimmen. Dabei sollten die beiden festzulegenden Punkte $(P_1(x_1, y_1))$ und $P_2(x_2, y_2)$ hinreichend weit voneinander entfernt liegen, so dass eine sichere Aussage über den Anstieg getroffen werden kann. Bezugnehmend auf das Beispiel (**Bild 4.8**) ist der Anstieg b wie folgt definiert:

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta m}{\Delta \alpha} = \frac{m_2 - m_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Die Konstante a berechnet sich aus der o.g. allgemeinen Funktionsgleichung bei Verwendung der Mittelwerte für x und y .

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Die aufgetretenen Messabweichungen sind in Form von Fehlerbalken in das Diagramm anzutragen. Dabei sind folgende Vorgehensweisen zu beachten.

- Die auftretenden Messabweichungen der über Ordinate und Abszisse aufgetragenen Messwerte sind nach den in **Abschnitt 4.1** beschriebenen Methoden zu ermitteln und an mindestens zwei Messwerten anzutragen.
- Der Fehlerbalken wird dort an den Messpunkt angetragen, der relativ (*prozentual*) am weitesten von der Trendlinie entfernt liegt. Dabei kann der Fehlerbalken in positiver (*max.*) oder in negativer (*min.*) Richtung angetragen werden. Für die weitere Bestimmung der relativen Messabweichung ist nur der Betrag wichtig.

Mit der Erstellung der Fehlerbalken ist auch die Angabe eines Vertrauensbereiches zu der erstellten Trendlinie möglich. Dazu werden die maximalen und die minimalen Werte der Fehlerbalken für jeden Messpunkt erfasst und der Bereich über und unter der Trendlinie kenntlich gemacht.

Die exakte Berechnung der Messabweichung unter Verwendung der linearen Regression ist in **Abschnitt 4.3** dargestellt.

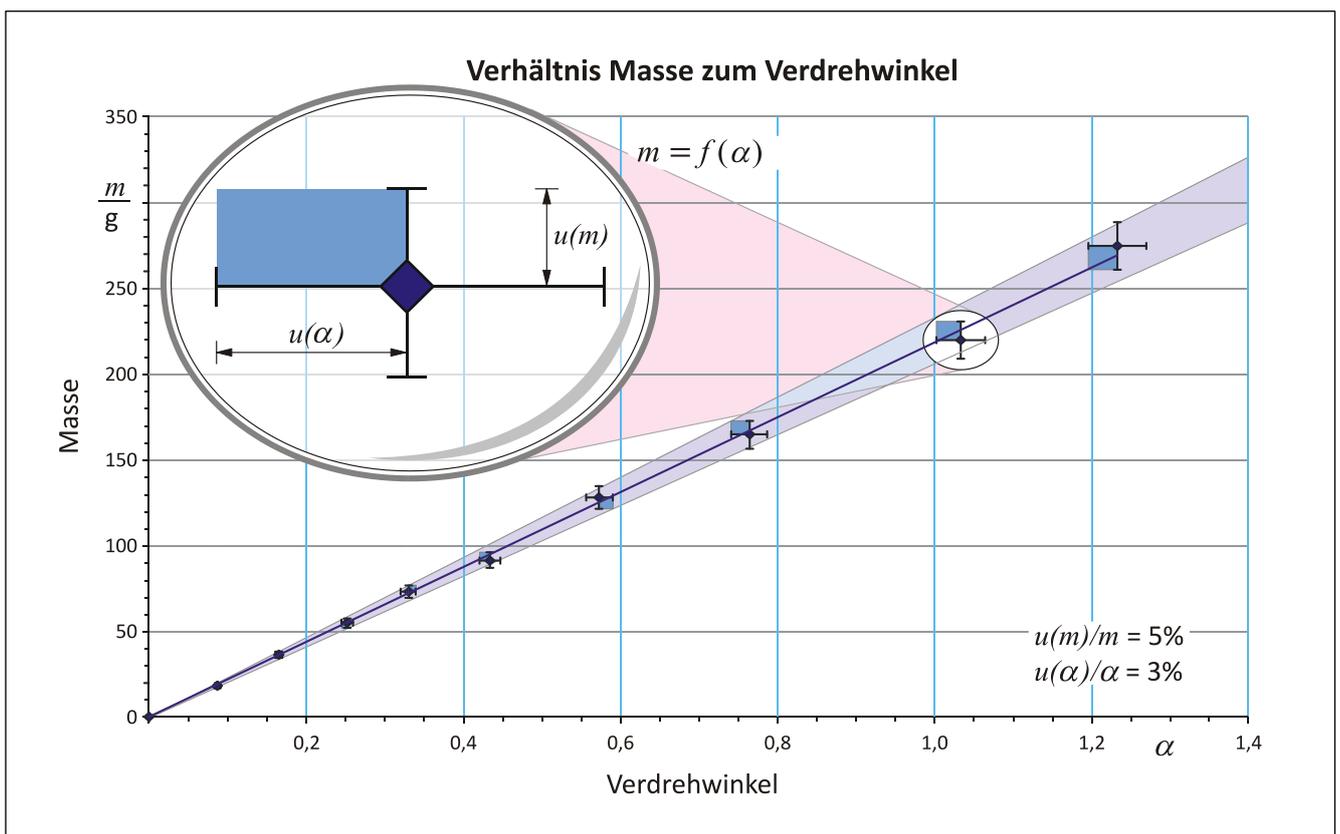


Bild 4.9: Abhängigkeit der Gesamtmasse m vom Verdrehwinkel α (Darstellung mit Fehlerbalken)

Um die maximale relative Messunsicherheit zu bestimmen, gilt allgemein Folgendes:

$$\frac{u(x)}{x} = \frac{\text{Absolute Messunsicherheit}}{x_i} \quad \text{oder} \quad \frac{u(y)}{y} = \frac{\text{Absolute Messunsicherheit}}{y_i}$$

Die relative Messunsicherheit wird als dimensionslose Zahl (*ohne Einheit*) oder in Prozent angegeben.

4.6.2 Nichtlineare Zusammenhänge der Form $y = a \cdot x^b$

Bei diesen Zusammenhängen ist es zweckmäßig, auf der Abszisse statt x den Wert x^b aufzutragen, damit man als Schaubild wieder eine Gerade erhält.

So ist beispielsweise das s - t -Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung eine Gerade, wenn s über t^2 abgetragen wird.

Bei manchen Messungen variieren die betrachteten Messgrößen über mehrere Größenordnungen (z.B. Frequenz im Hörbereich). In diesem Fall ist die Verwendung von Logarithmen-Papier sinnvoll. Auf diesem Koordinatenpapier, bei dem beide Achsen logarithmisch eingeteilt sind, erscheinen alle Zusammenhänge der Form $y = a \cdot x^b$ als **Gerade**, da

$$\log y = \log(a \cdot x^b) = b \cdot \log x + \log a$$

Wie diese Gleichung zeigt, erlaubt diese Form der Darstellung vor allem die Bestimmung des Exponenten n aus dem Anstieg der Darstellung (analog vorigem Abschnitt, wobei für P_1 und P_2 die logarithmierten Messwerte verwendet werden).

Die Erstellung der Fehlerbalken erfolgt entsprechend der Beschreibung in **Abschnitt 4.6.1**

Beispiel 4.8: Doppeltlogarithmische Darstellung

Nachweis des photometrischen Abstandsgesetzes in Abhängigkeit der Bestrahlungsstärke E_v vom Abstand r zwischen Lichtquelle und Empfänger. Der Exponent des Zusammenhanges ist zu bestimmen.

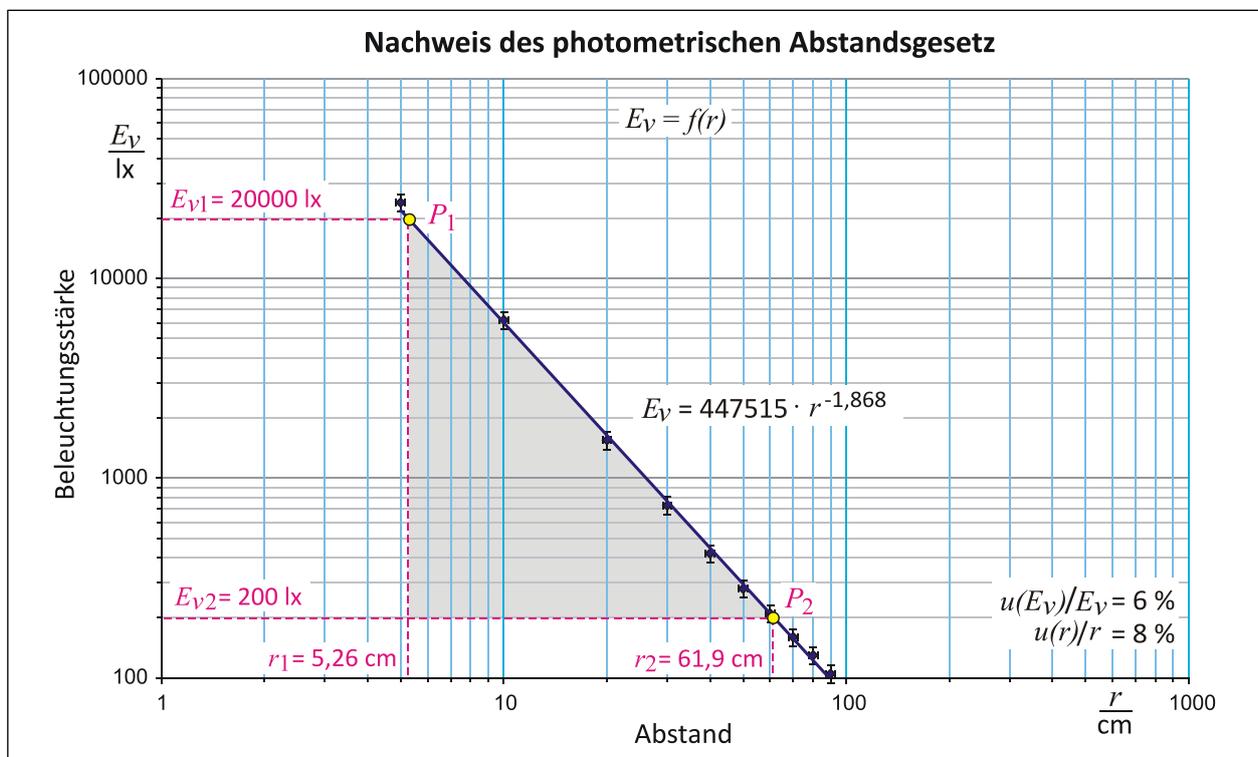


Bild 4.10: Abhängigkeit der Bestrahlungsstärke E_v vom Abstand r (Lichtquelle – Empfänger)

Durch die logarithmische Darstellung sowohl der Ordinate als auch der Abszisse wird der Graph eine Gerade. Für die Fehlerbalken wurde für die Bestrahlungsstärke E_v eine relative Abweichung von 6% und für den Abstand r von 8% bestimmt und eingetragen.

Der Anstieg ergibt sich zum einen aus der Regressionsrechnung (siehe **Bild 4.10**) zu $b = -1,87$ oder wird zum anderen aus zwei Koordinatenpunkten der Geraden ermittelt.

Zum Beispiel $P_1(r_1, E_{v_1})$ und $P_2(r_2, E_{v_2})$ ergibt:

$$b = \frac{\ln(E_{v_2}/E_{v_1})}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{\ln(E_{v_2}) - \ln(E_{v_1})}{\ln(r_2) - \ln(r_1)} = \frac{\ln(200) - \ln(20000)}{\ln(61,90) - \ln(5,26)} = -1,87$$

Damit ergibt sich im Rahmen der abgeschätzten Messgenauigkeit (*Festlegung der Fehlerbalken*) eine Proportionalität von $E \sim r^{-2}$, welche dem theoretischen Wert entspricht.

4.6.3 Nichtlineare Zusammenhänge der Form $y = a \cdot e^{b \cdot x}$

Koordinatenpapier mit nur einer logarithmisch unterteilten Achse ist besonders geeignet, um exponentielle Abhängigkeiten $y = a \cdot \exp(b \cdot x)$ darzustellen. Wegen

$$\ln y = b \cdot x + \ln a$$

werden die y -Werte logarithmisch im Diagramm aufgetragen. Man erhält eine Gerade, deren Steigung durch den Anstieg b bestimmt ist.

Anmerkung: Die Darstellungen $\ln y$ und $\log y$ unterscheiden sich bei der Darstellung bzw. der Auswertung um den Faktor $\log e = 0,43$.

Beispiel 4.9: Halblogarithmische Darstellung

Bei einer aufgenommenen Entladungskurve eines Kondensators soll die Abklingkonstante τ bestimmt werden.

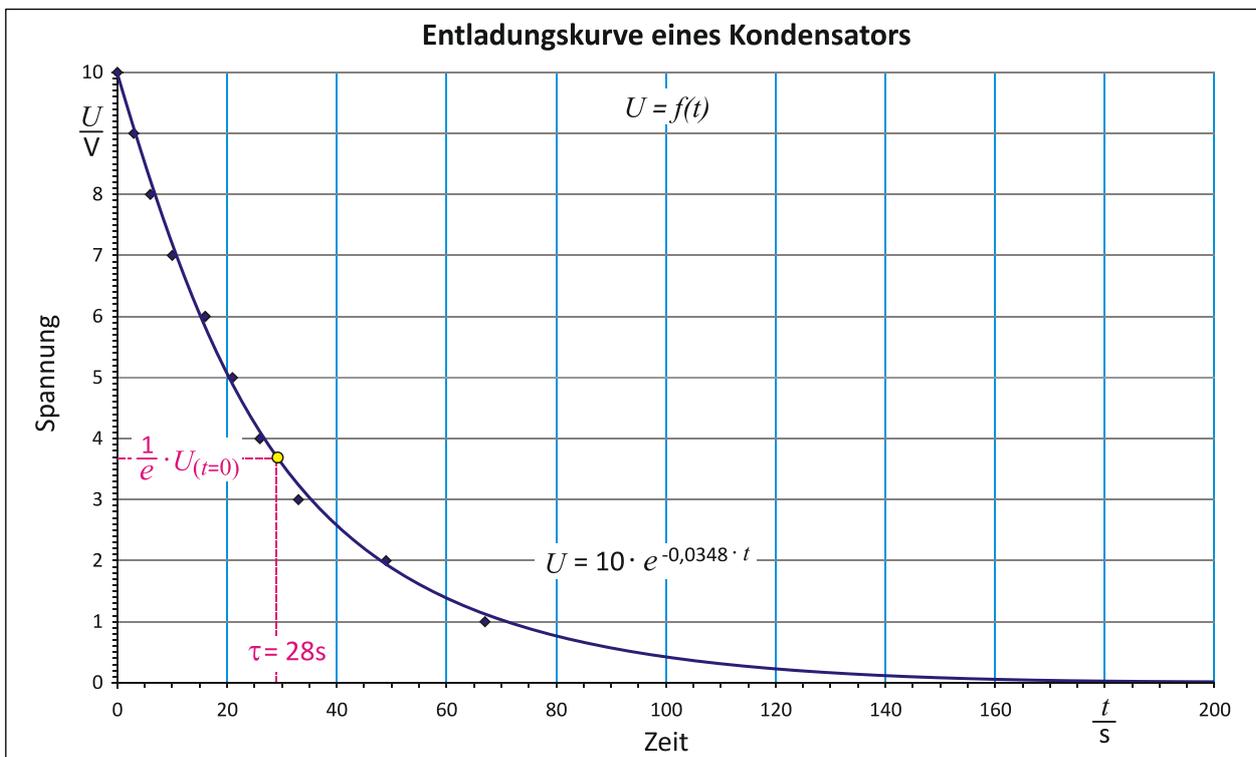


Bild 4.11: Zeitliches Verhalten beim Ausschaltvorgang am Kondensator (*linear skaliert*)

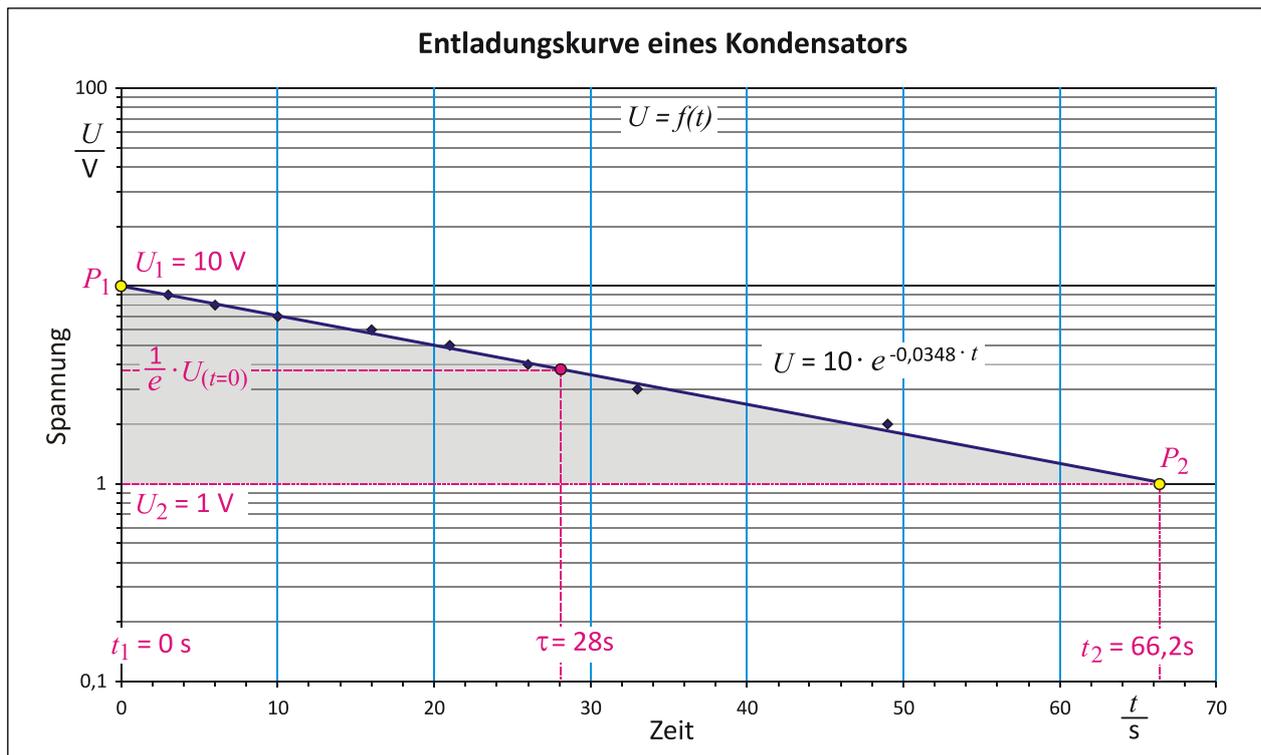


Bild 4.12: Zeitliches Verhalten beim Ausschaltvorgang am Kondensator (Spannung log. skaliert)

Der Spannungsverlauf wird theoretisch beschrieben durch die Gleichung

$$U = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Die Bestimmung der **Zeitkonstanten** τ ist auf zwei Wegen möglich:

- unter Verwendung der Bestimmungsgleichung aus den Parametern der Bauelemente. Für das Beispiel 4.9 gilt:

$$\tau_1 = R \cdot C = 100 \text{ k}\Omega \cdot 200 \text{ }\mu\text{F} = \underline{20 \text{ s}}$$

Durch Toleranzen der Bauelemente beträgt die Abweichungen ca. 30% ($u(t) = \pm 6 \text{ s}$).

- Durch den experimentellen Nachweis eines RC-Gliedes wird eine Entladungskennlinie aufgenommen. Das Diagramm (**Bild 4.12**) zeigt den funktionellen Zusammenhang $U = f(t)$ in logarithmischer Einteilung der y -Achse (3 Dekaden). Durch Umstellen der allgemeinen Gleichung gilt

$$\ln U = \ln U_0 - t \cdot \tau^{-1}.$$

Wird diese Gleichung nach τ^{-1} aufgelöst, kann der Exponent aus den Punkten $P_1(t_1, U_1)$ und $P_2(t_2, U_2)$ bestimmt werden. Dieser Anstieg b ergibt sich also:

$$\tau^{-1} = b = \frac{\ln(U_2/U_1)}{\Delta t} = \frac{\ln(U_2) - \ln(U_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\ln(1) - \ln(10)}{66,2 - 0} = \underline{-0,0348}$$

Die Zeitkonstante beträgt $\tau_2 = \underline{28,7 \text{ s}}$.

Durch Vergleich beider Methoden ergibt sich eine Differenz von $\Delta\tau = \tau_2 - (\tau_1 + 6 \text{ s}) = \underline{2,7 \text{ s}}$. Der Fehler der experimentellen Messmethode muss also mindestens 9,4% betragen.

4.6.4 Histogramm

Bei einer Darstellung in einem Histogramm werden die Messwerte in gleichbreite Intervalle eingeordnet und die Häufigkeit der Messwerte in diesen Intervallen als Balkenhöhe aufgetragen.

- Balkenbreite: Intervalleinteilung
- Balkenhöhe: Anzahl der Messwerte im Intervall.

Das Beispiel für ein Histogramm zeigt die Darstellung der Häufigkeitsverteilung in **Bild 4.5**, dabei ist eine Intervallbreite $\Delta T = 0,05$ s gewählt.

4.6.5 Wahrscheinlichkeitsdiagramm

Mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsdiagramms (QQ-Plot) kann geprüft werden, ob sich die Verteilung des untersuchten Merkmals einer Normalverteilung anpasst und wie groß außerdem der Mittelwert \bar{x} und die Standardabweichung σ sind. Das Wahrscheinlichkeitsnetz ist ein Koordinatensystem, dessen Ordinate so eingestellt wurde, dass die Summenprozentkurve der Normalverteilung eine Gerade wird (**Bild 4.13**)

Beispiel 4.10: Nutzung von Wahrscheinlichkeitspapier

Für dieses Beispiel dient die Datenbasis aus **Tabelle 4.2**

x	$H(x)$	$h(x)$	$\Sigma h(x)$
3,05	0	0%	0%
3,10	1	2%	2%
3,15	2	4%	6%
3,20	10	20%	26%
3,25	9	18%	44%
3,30	11	22%	66%
3,35	10	20%	86%
3,40	5	10%	96%
3,45	2	4%	100%
3,50	0	0%	100%
Σ	50	100%	

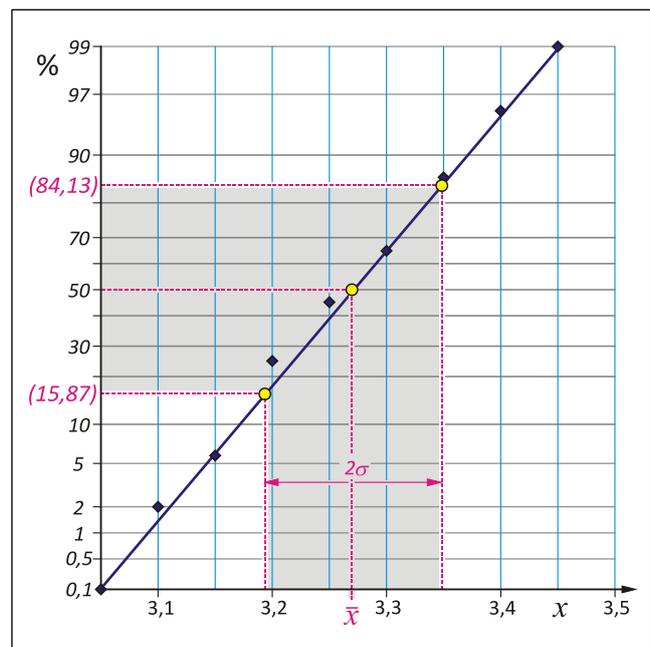


Bild 4.13: Wahrscheinlichkeitspapier

x Zahl der Ereignisse pro Zeiteinheit

$H(x)$ **absolute Häufigkeit** Wie oft ist der Fall x während der Messung eingetreten?

$h(x)$ **relative Häufigkeit** $(H(x) / \Sigma H(x)) \times 100\%$

$\Sigma h(x)$ **Summenhäufigkeit** Aufsummierung der relativen Häufigkeiten für alle Fälle $\leq x$

Aus der Geraden im Wahrscheinlichkeitsdiagramm kann direkt der Mittelwert \bar{x} des Wertebereiches bei 50% abgelesen werden ($\bar{x} = 3,27$). Es können zwei weitere Fälle direkt aus dem Diagramm ermittelt werden ($\bar{x} + \sigma = 3,35$ bei 84,13% und $\bar{x} - \sigma = 3,19$ bei 15,87%). Die betragsmäßige Summe von σ ist die doppelte Standardabweichung ($2\sigma = 0,16$).

Durch einen Vergleich der Wertepunkte mit der Regressionsgeraden, ist zu erkennen, dass die Verteilung der Datenmengen fast normalverteilt ist.

4.6.6 Darstellung von Winkelabhängigkeiten

Bei der Darstellung einer Messgröße, die von einem Winkel abhängt, wird Polarkoordinatenpapier verwendet. Die Beträge werden hier radial vom Zentrum her abgetragen, die Winkeleinteilung ist durch das Koordinatenpapier vorgegeben. Diese können auf der linken sowie auf der rechten Seite des Diagramms angetragen werden.

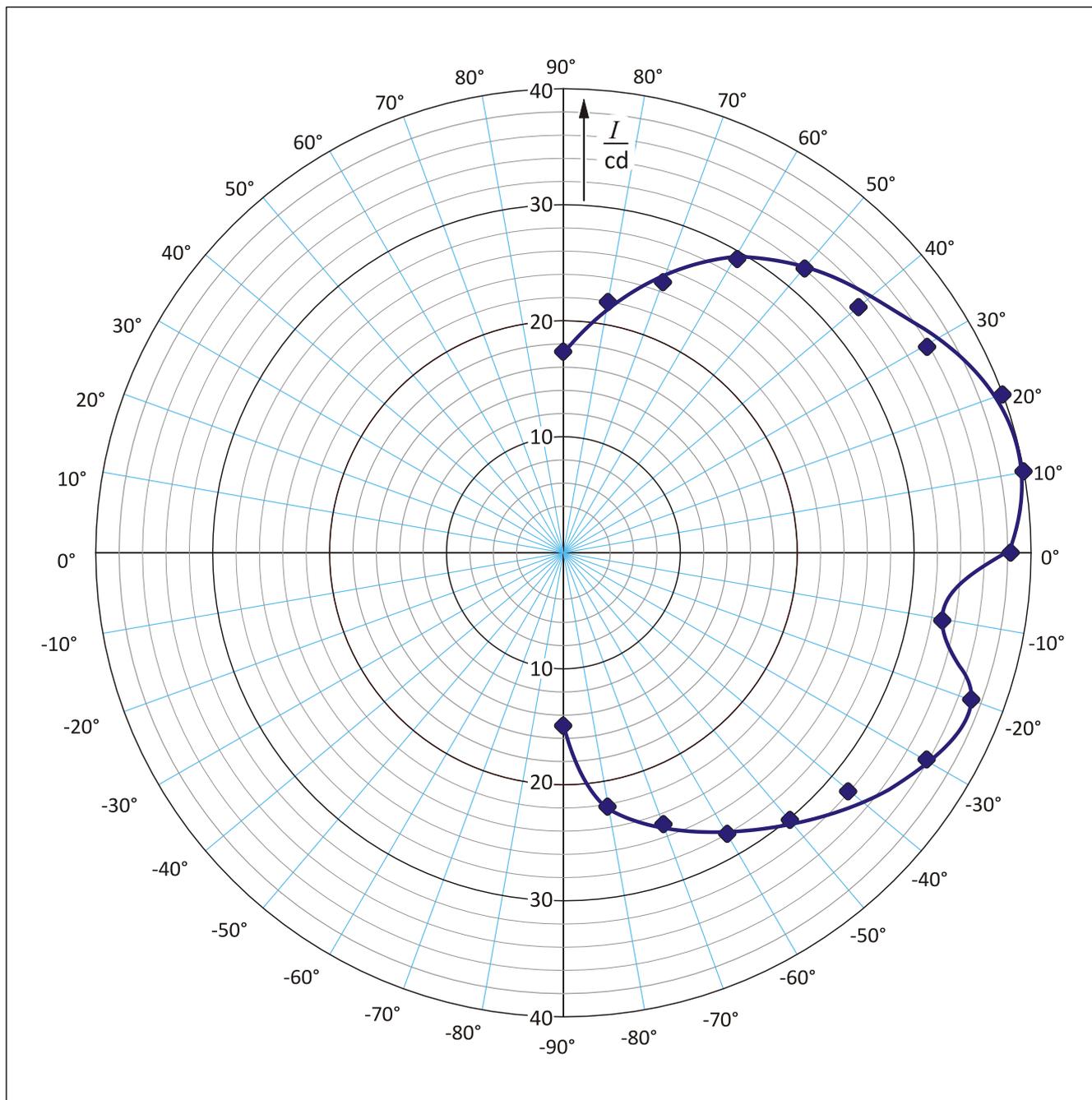


Bild 4.14: Darstellung der Richtstrahlcharakteristik einer Glühlampe im Abstand $r = 20$ cm zum Messsensor

5. Verhalten im Labor

5.1 Allgemeines Verhalten

Die Studierenden haben sich im Labor so zu verhalten, dass Personen nicht gefährdet werden oder gar zu Schaden kommen und Geräte, Anlagen und Einrichtungen nicht beschädigt oder zerstört werden.

Das setzt

- ein hohes Maß an Disziplin,
- Rücksichtnahme,
- konzentriertes Arbeiten,
- Einhalten grundsätzlicher Regeln des Gesundheits-, Arbeits- und Brandschutzes sowie
- das Befolgen der von den Betreuern für den speziellen Versuch gegebenen Anweisungen

voraus.

Die Rücksichtnahme auf die nachfolgenden Studierenden erfordert von jedem Einzelnen, mit dem ihm anvertrauten Inventar sorgfältig umzugehen und nach Beendigung der Arbeiten den Praktikumsplatz in einem ordnungsgemäßen Zustand zu verlassen.

Die zur Verfügung gestellten Arbeitsmittel sind sparsam zu verwenden bzw. pfleglich zu behandeln. Insbesondere sind zu beachten:

- Der Verbrauch von Versuchssubstanzen, Wasser, Gas, Elektroenergie, Eis usw. ist so gering wie möglich zu halten.
- Empfindliche und teure Geräte (z.B.: Röntgengerät) sind mit ganz besonderer Sorgfalt zu benutzen. Zu diesen gehören u.a. Analysenwaagen, Mikroskope sowie elektronische und elektrische Messgeräte. Spektrallampen dürfen nur so lange eingeschaltet bleiben, wie es für die Experimente unbedingt erforderlich ist.
- Die ausgelegten Verzeichnisse, Tabellen, Aufgabenstellungen usw. sowie Skalen, Bildschirme, Mattscheiben usw. **dürfen nicht durch Markieren, Beschriften oder Unterstreichungen entwertet werden.**

5.2 Gesundheits- Arbeits- und Brandschutz

5.2.1 Feuer- und explosionsgefährliche Stoffe

a) Verhütung von Bränden:

- Bunsenbrenner sowie elektrische Heiz- und Wärmegeräte sind so aufzustellen, dass sich keine benachbarten Gegenstände entzünden können. Daher sind unbedingt feuerfeste Untersätze zu verwenden. Brandgefahr besteht auch beim Wegwerfen noch glimmender Streichhölzer.
- Mit brennbaren Flüssigkeiten ist vorsichtig umzugehen. Das bezieht sich im Praktikum vor allem auf Azeton, n-Pentan, Methanol und Ethanol. Sie sind von offenen Flammen und Funken fernzuhalten. Die Brände kommen dadurch zustande, dass diese Dämpfe schwerer als Luft sind.
- Das Rauchen in Praktikumsräumen ist untersagt!

b) Verhalten bei Bränden:

Wer einen Brand bemerkt, hat unverzüglich weitere, in der Nähe befindliche Personen darauf aufmerksam zu machen; gemeinsam mit diesen sind folgende Schritte zu unternehmen:

- Über den Notruf 112 (*Feuerwehr/Rettungsdienst*) ist die Feuerwehr von einem erreichbaren Telefon zu alarmieren.
- Bis zum Eintreffen der Feuerwehr ist der Brand mit den zur Verfügung stehenden Handfeuerlöschern zu bekämpfen.
Dabei darf nicht blindlings in den Rauch gespritzt werden, sondern das Löschmittel ist unmittelbar auf den Brandherd zu leiten. Unter Spannung stehende elektrische Anlagen und Geräte unbedingt vom Netz trennen – **Notschalter betätigen** – !
Im Brandraum sind möglichst Tür und Fenster geschlossen zu halten, um Zugluft und damit ein weiteres Ausbreiten des Feuers zu verhindern.
- Brennende Personen nicht mit dem Handfeuerlöscher anspritzen, sondern Brandschutzdecken oder anderes Deckmaterial zum Ersticken der Flammen benutzen.

5.2.2 Gesundheitsgefährdende Stoffe**a) Quecksilber**

Quecksilber kommt im Praktikum häufig in Glasgeräten vor. Wird ein solches Gerät zerbrochen, so zerspritzt das Quecksilber in feinste Kügelchen und verdampft bereits bei Zimmertemperatur sehr stark. Da schon sehr geringe Mengen Quecksilberdampf Vergiftungserscheinungen hervorrufen können, ist es unbedingt erforderlich, auch kleinste Quecksilbertröpfchen aufzusammeln. Während für größere Tröpfchen eine Quecksilberzange verwendet wird, sind feinste Spritzer in Ritzen und Fugen durch Bestreuen mit Zinkstaub oder Jodkohle unschädlich zu machen.

b) Ätzigifte

Als Ätzigifte bezeichnet man solche Stoffe, die die Haut angreifen und das Gewebe zerstören und auf diese Weise meist schlecht heilende Wunden hervorrufen. Dabei sind die zarten Schleimhäute des Mundes und der Augen besonders gefährdet. Zu dieser Gruppe gehören u. a. Säuren und Laugen, die auch im Praktikum Anwendung finden können.

Bei Unfällen sind die verätzten Stellen sofort mit reichlich Wasser abzuspülen. Anschließend ist sofort ein Arzt aufzusuchen.

c) Organische Lösungsmittel

Organische Lösungsmittel werden bei einer Anzahl von Versuchen als Versuchssubstanzen oder Reinigungsmittel verwendet. Bei diesen Stoffen ist eine Gefährdung durch das Einatmen der Dämpfe möglich. Es ist daher vorsichtig mit ihnen umzugehen. Das Verdampfen größerer Mengen ist zu vermeiden. Außerdem können organische Lösungsmittel Schäden hervorrufen, wenn sie ins Auge gelangen. Bei denjenigen Versuchen, bei denen die Gefahr des Herumspritzens besteht, sind die bereitliegenden Schutzbrillen oder -schirme zu verwenden.

d) Kohlenmonoxid

Kohlenmonoxid ist ein brennbares, farb-, geruch- und geschmackloses Gas, das im Leuchtgas zu 5 – 10% enthalten ist. Es hat eine viel höhere Affinität zum Hämoglobin als Sauerstoff und kann daher zur Erstickung führen. Deshalb ist darauf zu achten, dass kein unverbranntes oder unvollständig verbranntes Leuchtgas ausströmt.

5.2.3 Druck- und Vakuumgefäße

a) Druckflaschen

Flaschen für verdichtete oder verflüssigte Gase müssen stets so aufgestellt werden, dass sie nicht umfallen können. Die Flaschen und Reduzierventile dürfen erst nach Unterweisung durch den Betreuer bedient werden. Weiterführende Eingriffe in die Anlagen sind nicht gestattet.

b) Evakuierte Gefäße

Durch Implosion von evakuierten Glasgefäßen können Schnittverletzungen auftreten. Besonders gefährdet sind die Augen. Das gilt nicht nur für solche Gefäße, die erst im Praktikum luftleer gepumpt werden, sondern auch für Dewargefäße, Röntgenröhren, Kathodenstrahlröhren usw.

Beim Experimentieren ist daher Vorsicht geboten. Schutzvorrichtungen dürfen nicht entfernt werden, beim Umgang mit ungeschützten evakuierten Gefäßen sind Schutzbrillen oder -schirme zu verwenden.

5.2.4 Kältemischung und verflüssigte Gase

Beim Herstellen von Kältemischungen aus fester Kohlensäure und organischen Lösungsmitteln schäumt die Flüssigkeit durch das gasförmig entweichende Kohlendioxid heftig auf. Um ein Überlaufen zu vermeiden, ist vorsichtig vorzugehen.

- Schädliche Dämpfe!
- Brandgefahr!
- Augen schützen!

Beim Arbeiten mit flüssigen Gasen müssen Schutzbrillen oder -schirme getragen werden. Dewargefäße sind vor dem Füllen einwandfrei zu trocknen.

5.2.5 Elektrische Anlagen

Stromquellen mit einer Spannung von mehr als 50V können bei der Berührung der Spannung führenden Leiter lebensgefährliche Schäden hervorrufen.

Der Auf- und Abbau elektrischer Schaltungen hat stets im spannungslosen Zustand zu erfolgen. Die Schaltung ist übersichtlich aufzubauen, Bedienelemente müssen leicht zugänglich sein. An den Versuchsplätzen bereits fest verlegte Leitungen dürfen nicht verändert werden.

An die auf- oder umgebauten Schaltungen darf erst nach Prüfung durch den Betreuer Spannung angelegt werden.

Unter Spannung stehende Anlagen müssen ständig überwacht werden. Treten Unregelmäßigkeiten auf, so dürfen keine eigenmächtigen Korrekturen an der Schaltung vorgenommen werden, sondern es ist auszuschalten und der Betreuer zu benachrichtigen.

Besondere Vorsicht ist beim Umgang mit Spannungen über 500V geboten. Es ist mit Lebensgefahr verbunden, wenn Schutzvorrichtungen außer Betrieb gesetzt werden.

Bei Unfällen ist die Spannung sofort abzuschalten. Ist das nicht möglich, so muss versucht werden, von einer elektrisch isolierten Stelle (*Holzstuhl, Holztisch o. ä.*) den Verunglückten von der Leitung zu trennen. Auch bei geringfügigen elektrischen Schlägen muss der Verunglückte sofort durch eine zweite Person zur Untersuchung zu einem Arzt gebracht werden.

5.2.6 Ionisierende Strahlung

Das Verhalten beim Umgang mit ionisierender Strahlung und Geräten, die solche Strahlung erzeugen, ist in der Strahlenschutzverordnung (*StrlSchV*) und in der Röntgenverordnung (*RöV*) festgelegt. Da im Praktikum nur bauartzugelassene Geräte und Präparate minimaler Aktivität verwendet werden, sind hier nur Hinweise zum ordnungsgemäßen Umgang mit diesen angegeben. Weitere Ausführungen über die Gefährdungen und gesetzlichen Bestimmungen befinden sich im Strahlenschutzheft. Dieses Heft ist von der an einem Strahlungsversuch teilnehmende Gruppe vor dem Versuch zu lesen bzw. durchzuarbeiten.

a) Röntgenstrahlen

Im Praktikum wird an einer Schulröntgenanlage gearbeitet. Dieses bauartzugelassene Gerät ist mit verschiedenen Sicherheitsschaltern versehen, so dass der Betrieb entsprechend der Bedienungsanleitung mehrfach abgesichert ist. Ein Strahlenausritt ist nur bei mutwilliger Zerstörung möglich.

b) Radioaktive Präparate

Die Aktivität der im Physikalischen Praktikum verwendeten Präparate ist sehr gering. Trotzdem können bei leichtfertigem Umgang Strahlenschäden auftreten. Aus diesem Grund dürfen Präparate nicht längere Zeit in unmittelbare Nähe des menschlichen Körpers gebracht werden. Sie sind nach Gebrauch sofort wieder in den dafür vorgesehenen Behälter zu legen. Jegliches Manipulieren an den Quellen ist verboten. Während des Arbeitens mit radioaktiven Präparaten sind Essen, Trinken und der Gebrauch von Kosmetika untersagt.

Während einer Schwangerschaft ist jede Arbeit unter Einwirkung ionisierender Strahlung verboten.

5.2.7 Laser

Die maximale Leistung der im Praktikum verwendeten Laser beträgt 1 mW. Bei Lasern dieser Leistungsstufe besteht eine Gefährdung nur dann, wenn die Netzhaut des Auges direkt vom Laser bestrahlt wird. Der Strahlengang des Lasers ist daher nur im vom Versuch benötigten Bereich zu belassen und auch bei Justierung niemals direkt in die Laseraustrittsöffnung sehen!

5.2.8 Sonstige Bestimmungen

Es ist unzulässig, organische Flüssigkeiten, Säuren, Laugen oder Kältemischungen in die Ausgüsse zu schütten. Zur Entsorgung sind die Abfallflaschen an den Arbeitsplätzen zu verwenden.

Streichhölzer, Glasscherben und andere Abfälle sind nicht in die Papierkörbe zu werfen, sondern direkt in die dafür bereitstehenden Behälter.

Das Besteigen von Stühlen und Tischen ist nicht gestattet. Es sind Leitern bereitgestellt, wenn Teile der Versuchsapparatur nicht unmittelbar zugänglich sind.

Der Aufenthalt während des Praktikums erfolgt nur am Arbeitsplatz für das vorgesehene Experiment. Gleichzeitig arbeitende Versuchsgruppen sind nicht zu stören.

6. Garantie- und Eichfehlergrenzen von Messgeräten nach Herstellerangaben

6.1 Längenmaße mit Teilung

l : gemessene Länge $u(l) = u_z(l) + u_s(l)$ Betrag der Eichabweichung

• Stahlmaßstäbe: $u(l) = 500 \mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot l$

• Bank- und Gliedermaßstäbe: $u(l) = 1000 \mu\text{m} + 10^{-3} \cdot l$

• Messschieber:
Genauigkeitsklasse I $u(l) = 20 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot l$

Genauigkeitsklasse II $u(l) = 50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot l$

Genauigkeitsklasse III $u(l) = 100 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot l$

• Bügelmessschrauben:
Genauigkeitsklasse I $u(l) = 2 \mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l$

Genauigkeitsklasse II $u(l) = 5 \mu\text{m} + 10^{-5} \cdot l$

• Messuhren:

<i>Messbereich</i>		0...3 mm	0...10 mm	0...25 mm
Genauigkeitsgrad I	$u(l)/\mu\text{m}$	10	15	22
Genauigkeitsgrad II	$u(l)/\mu\text{m}$	15	25	40

• Maßstabprüfokulare: $u(l) = 20 \mu\text{m}$

• Maßstabmessplatten: $u(l) = 2 \mu\text{m}$

6.2 Winkelmesser

Skalenwert 1° $u(\alpha)$ Teilungsabweichung
gemessener Winkel $< 180^\circ$

• Durchmesser 100 mm: $u(\alpha) = 10' + 0,1' \cdot \alpha/1^\circ$

• Durchmesser 150, 200 mm: $u(\alpha) = 10' + 0,05' \cdot \alpha/1^\circ$

6.3 Messzylinder

V_N : Nenninhalt $u(V_N)$: Betrag der Eichabweichung
(max. messbares Volumen)

V_N/ml	10	25	50	100	250	500	1000	2000
$u(V_N)/\text{ml}$	0,1	0,5	0,5	1	2	5	10	20

6.4 Pyknometer

V_I : angegebener Istinhalt $u(V_I)$: Betrag der Eichabweichung

V_I/ml	1	5	10	25	50
$u(V_I)/\text{ml}$	0,003	0,003	0,005	0,01	0,02

6.5 Stoppuhren

t : gemessene Zeit

$u(t)$: Betrag der Eichabweichung

Halbschwingungsdauer (Zeigertakt)	Dauer eines Zeigerumlaufes	$u(t)$
0,1 s	30 s	$0,1 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$
0,2 s	60 s	$0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$

6.6 Laborthermometer

ϑ : gemessene Temperatur

$u(T)$: Beträge der Skalenteilungsfehler

Skalenwert		1	0,5	0,2	0,1
ϑ	(-5 ... +60)°C	0,7 K	0,5 K	0,2 K	0,15 K
	(60 ... 110)°C	1,0 K	-	0,3 K	0,25 K
	(110 ... 210)°C	1,5 K	1,0 K	0,5 K	-
	(210 ... 310)°C	2,0 K	1,5 K	-	-
	(310 ... 400)°C	2,5 K	-	-	-

• Thermometer des Kalorimeters: $u(T) = 0,02 \text{ K}$

6.7 Waagen

a) Feinwaagen Gleicharmige Balkenwaage mit Einspielungslage

E : Empfindlichkeit

m : gemessene Masse

m_1	für alle Belastungen	$u(m_1)$	1 Skt / E
m_2	0 ... 1000 g	$u(m_2)$	$2 \cdot 10^{-3} \text{ g}$
m_3	0 ... 100 g	$u(m_3)$	$2 \cdot 10^{-5} \text{ g}$
	100 ... 200 g		$2 \cdot 10^{-3} \text{ g}$
	200 ... 5000 g		$1 \cdot 10^{-5} \text{ g}$

b) Elektronische Präzisionswaagen (Siehe bei digital anzeigenden Messgeräten)

• Anzeigegenauigkeit

$e = 1\text{digit}$

c) Wägestücke

Nenn- masse m/g	Handels- gewichts- stücke M3 $u(m)/\text{mg}$	Präzisions- gewichts- stücke M1 $u(m)/\text{mg}$	Fein- gewichts- stücke F2 $u(m)/\text{mg}$
2000	1000	100	-
1000	500	50	7,5
500	250	25	3,0
200	100	10	1,5
100	50	5,0	0,75
50		3,0	0,45
20		2,5	0,30
10		2,0	0,23
5		1,6	0,23
2		1,2	0,15
1		1,0	0,15

Nenn- masse m/mg	Plättchen- gewichts- stücke $u(m)/\text{mg}$
500	0,8
200	0,6
100	0,5
50	0,4
20	0,3
10	0,25
5	0,2
2	0,2
1	0,2

6.8 Elektrische Messgeräte

6.8.1 Analoge Messgeräte

Die Angabe der Genauigkeitsklasse (*zulässige Abweichung in Prozent des Messbereichsendwertes*) finden Sie auf dem Skalenträger bzw. in den Geräteunterlagen.

Beispiel 6.1: Bestimmung der Systematischen Messabweichung eines analogen Strommessgerätes

Der im **Beispiel 4.2** verwendete Vielfachmesser hat eine Genauigkeitsklasse von 1,5. Der benutzte Strommessbereich beträgt bei Vollausschlag $I_{MB}=1$ A. Somit ist die maximale systematische Messabweichung bei diesem Messbereich unabhängig von der Höhe der gemessenen Stromstärke.

$$u_s(I) = 1 \text{ A} \cdot 1,5\% = \underline{15 \text{ mA}}$$

Bei dieser Messabweichung handelt es sich um einen Absolutwert (*mit Einheit*). Ist zum Beispiel der Stromwert $I_1 = 50$ mA und $I_2 = 821$ mA, so ist die relative Messunsicherheit von

$$\frac{u_s(I_1)}{I_1} > \frac{u_s(I_2)}{I_2} .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} I_1 &= (50 \pm 15) \text{ mA} & \Rightarrow & \text{relativer Fehler} = 30\% \\ I_2 &= (821 \pm 15) \text{ mA} & \Rightarrow & \text{relativer Fehler} = 1,8\% . \end{aligned}$$

Aus diesem Grund ist es für die Fehlerbetrachtung wichtig, dass zur Messung immer der **optimale Messbereich** gewählt wird. Eine weitere Messunsicherheit ($u_z(I)$) wird verursacht durch die Ablesunsicherheit.

6.8.2 Digitale Messgeräte

Für digital anzeigende Messgeräte verschwindet die Ablesungenauigkeit. Die maximale Messunsicherheit setzt sich in der Regel aus drei Anteilen zusammen:

- Digitalisierungsfehler (*kleinste angezeigte Einheit*),
- Abweichung, bezogen auf den Bereichsendwert, und
- Abweichungen, bezogen auf den aktuellen Messwert.

Die Abweichungsanteile aus Bereichsendwert und aktuellem Messwert sind den Geräteunterlagen zu entnehmen.

Beispiel 6.2: Bestimmung der Messabweichung eines digitalen Spannungsmessgerätes

Eingestellter Messbereich $U_{MB} = 2$ V, angezeigter Messwert $U = 1,239$ V.

- Digitalisierungsfehler: $1 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 1 \text{ mV}$
- Abweichungsanteil Bereich: $4 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 4 \text{ mV}$
- Abweichungsanteil Messwert: $5 \cdot 10^{-4} \text{ V} = 0,5 \text{ mV}$

$$\text{Maximale Messabweichung: } 1 \text{ mV} + 4 \text{ mV} + 0,5 \text{ mV} = \underline{5,5 \text{ mV}}$$

6.8.3 Normalwiderstände

Bei 15 ... 25°C und geringer Belastung gilt: $\frac{u(R)}{R} = 3 \cdot 10^{-4} = \underline{0,03\%}$.

<h1 style="margin: 0;">W07</h1> <p style="margin: 0;">Physikalisches Praktikum</p>	<h2 style="margin: 0;">Gasthermometer</h2>	 <p style="margin: 0; font-size: small;">Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg</p>
--	--	---

Das Gasthermometer ist zur Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten idealer Gase geeignet. Insbesondere ermöglicht es eine experimentelle Einführung der absoluten Temperaturskala und gestattet die Bestimmung des absoluten Nullpunktes. Weiterhin wird der Volumenausdehnungskoeffizient von Luft bestimmt.

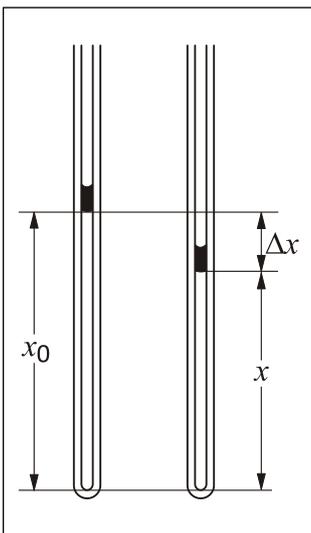
1. Theoretische Grundlagen

1.1 Beschreibung und technische Daten des Gasthermometers

Das Thermometer besteht aus einer einseitig geöffneten Glaskapillare, in der mittels eines kleinen Quecksilbertropfens ein Gasvolumen eingeschlossen werden kann. Die Länge des eingeschlossenen Gasvolumens kann auf einer an der Kapillare angebrachten Millimeterskala abgelesen werden. In einer Ausbauchung am offenen oberen Ende des Gasthermometers befindet sich Silikagel zur Trocknung der in die Kapillare eintretenden Luft. Durch eine gasdurchlässige Fritte zwischen der Ausbauchung und der Kapillare wird verhindert, dass Quecksilber aus dem Gasthermometer austreten kann. Eine zweite, kleine Ausbauchung direkt vor der Glasfritte dient zum Sammeln des Quecksilbers, falls der Quecksilbertropfen durch Erschütterung in kleine Kügelchen zersprungen ist. Zum Gerät gehört ein großes temperaturschockbeständiges Reagenzglas zur Aufnahme eines Wärmebades, dessen Temperatur z.B. mit einem Bunsenbrenner variiert werden kann.

1.2 Gasfeder

Das im Gasthermometer durch einen leicht beweglichen Quecksilbertropfen eingeschlossene Gasvolumen lässt sich als Gasfeder betrachten, die einige Analogien zu einer Schraubenfeder aufweist.



Wirkt auf den Quecksilbertropfen eine Kraft F , so wird dieser aus seiner Ruhelage, gekennzeichnet durch die Ruhelänge x_0 bzw. durch das Ruhévolumen

$$V_0 = A_{Kap} \cdot x_0, \tag{7.1}$$

um den Wert Δx abgelenkt (siehe **Bild 7.1**). Die auf den Quecksilbertropfen auszuübenden Kräfte lassen sich experimentell in einfacher Weise als Druckkräfte realisieren: Herrscht über dem Quecksilbertropfen zusätzlich zum Umgebungsluftdruck p_L eine Druckkomponente Δp , so wird auf den Tropfen die Kraft

$$F = \Delta p \cdot A_{kap} \tag{7.2}$$

ausgeübt. Der Tropfen verschiebt sich dann so lange, bis die Gasfeder eine gleich große Gegenkraft ausübt.

In einem Teilversuch soll untersucht werden, ob für die Gasfeder analog zur Schraubenfeder das Hookesche Gesetz

$$F = k \cdot \Delta x \qquad k: \text{Federkonstante} \tag{7.3}$$

gilt, d. h. der lineare Zusammenhang von einwirkender Kraft F und Änderungsweg Δx .

1.3 Boyle-Mariottesches Gesetz (*Isotherme Zustandsänderung*)

Die Zustandsgrößen Gasdruck und Gasvolumen einer abgeschlossenen Gasmenge bei konstanter Temperatur sind nicht unabhängig voneinander. Innerhalb des durch den Quecksilbertropfen abgeschlossenen Volumens des Gasthermometers soll bei konstanter Temperatur der Druck p über einen größeren Bereich geändert werden. Das jeweilige Gasvolumen V ist zu bestimmen.

Es ist im Versuch nachzuweisen, dass für die isotherme Zustandsänderung das Boyle-Mariottesche Gesetz gilt:

$$p \cdot V = \text{konst.} \quad (7.4)$$

1.4 Gay-Lussacsches Gesetz (*Isobare Zustandsänderung*)

Die Zustandsgrößen Volumen und Druck einer vorgegebenen Gasmenge sind von der Temperatur abhängig. Für die durch den Quecksilbertropfen eingeschlossene Gasmenge im Gasthermometer soll die Temperaturabhängigkeit des Volumens bestimmt werden. Der Temperaturbereich soll sich von 0°C bis ca. 100°C erstrecken.

Untersucht wird, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Volumen und Temperatur besteht. Durch Extrapolation nach tiefen Temperaturen sind ein absoluter Temperatur-Nullpunkt und damit eine absolute Temperaturskala definierbar.

Der Volumenausdehnungskoeffizient γ (*räumlicher Ausdehnungskoeffizient* [γ] = 1 K^{-1}) beschreibt die Ausdehnung des Gases bei einer Erhöhung der Temperatur:

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta\vartheta \quad V_0: \text{Volumen bei } 0^\circ\text{C} \quad (7.5)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Skizzieren Sie die Versuchsanordnung und tragen Sie folgendes ein:

- die relevanten Größen (*Kräfte, Querschnittsflächen*), die nach dem Hooke'schen Gesetz auf den Quecksilberfaden einwirken bzw.
- die relevanten Größen (*Druck, Volumen*), die nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte auf die eingeschlossene Luftsäule des Gasthermometers einwirken können.

Aufgabe 2: In einem Gasthermometer ($d_i=3 \text{ mm}$) ist unterhalb des Quecksilbertropfens Luft eingeschlossen. Durch Erwärmung des Gasthermometers ($0 \dots 100^\circ\text{C}$) dehnt sich die Luft unterhalb des Quecksilbertropfens aus und somit ändert sich auch die absolute Höhe des Quecksilbertropfens x ($172 \dots 233 \text{ mm}$) (siehe Wertetabelle).

- Berechnen Sie aus den sich einstellenden absoluten Höhen x die einzelnen Volumenwerte V unterhalb des Quecksilbertropfens.
- Stellen Sie die Funktion $V = f(\vartheta)$ graphisch dar und bestimmen Sie den Anstieg der Funktion.
- Berechnen Sie das **Volumen V_0** sowie den **Volumenausdehnungskoeffizienten γ** .

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Gasthermometer (*Quecksilberdichte: $\rho_{\text{Hg}}=13,55 \text{ g/cm}^3$*), großes Reagenzglas zur Temperierung, Thermometer, Kolbenprober, Stativmaterial, Wägesatz, Dreiwegehahn, Busengasbrenner, Messschieber

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung der Wegänderung des Quecksilbertropfens zur aufgewendeten Kraft

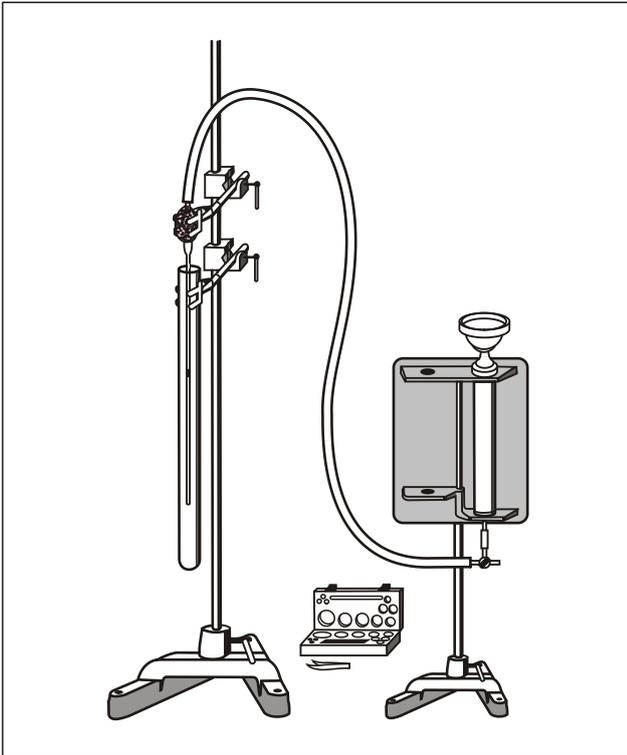


Bild 7.2: Versuchsaufbau

- Überprüfen Sie, ob der Versuchsaufbau **Bild 7.2** mit angeschlossenem Kolbenprobier 100 ml und geöffnetem Dreibein entspricht.
- Ermitteln Sie zunächst den Durchmesser d und die Masse m des Kolbens.
- Bestimmen Sie die Höhe h des Quecksilbertropfens bei geöffnetem Dreibein.
- Lesen Sie x_0 (siehe **Bild 7.1**) ab (x_0 sollte bei ca. $\frac{2}{3}$ der Gesamtlänge der Kapillare liegen).
- Stecken Sie den Kolben vorsichtig in den Glaszylinder und verschließen Sie den Dreibein.
- Legen Sie auf den Gewichtsteller nacheinander verschiedene Gewichtsstücke der Masse m (**von 0...1400 g**) in **100 g-Schritten** auf.
- Lesen Sie die sich einstellende Länge x an der Skale ab. Dabei ist der Gewichtsteller möglichst symmetrisch zu belasten.
- Messen Sie den örtlichen Luftdruck p_L mit Hilfe eines Barometers (im Eingangsbereich).

Aufgabe 2: Bestimmung des Volumens als Funktion der Temperatur

- Bauen Sie nach **Bild 7.3** den Versuch um, und geben Sie in das äußere Reagenzglas eine Wasser-Eis-Mischung $\vartheta \approx 0 \text{ }^\circ\text{C}$ (*Laborpersonal*) und ein Thermometer.
- Führen Sie die Messung bei normalem Luftdruck durch. Dazu öffnen Sie den Dreibein und ziehen vorsichtig den Kolben aus dem Kolbenprobier heraus.
- Lesen Sie die Temperatur ϑ und die Auslenkung x ab (1. Messwert).
- Erhitzen Sie mit dem Bunsenbrenner das Wasser innerhalb des großen Reagenzglases bis zum Siedepunkt und lesen Sie die Auslenkung x ab.

Achtung:

Vorsicht – Verbrennungsgefahr!

- Lassen Sie nun das Gasthermometer abkühlen und lesen Sie jeweils **in Schrittweiten von $\Delta T=10 \text{ K}$** die Länge x ab. Die Messung ist mit Erreichen **von $30 \text{ }^\circ\text{C}$** zu Ende.

Um den Temperaturgradienten zwischen Wasser und Gasthermometer möglichst klein zu halten, wird empfohlen, die Messungen bei hohen Temperaturen zu beginnen und dann bei ausgeschaltetem Bunsenbrenner das Wasserbad langsam abkühlen zu lassen.

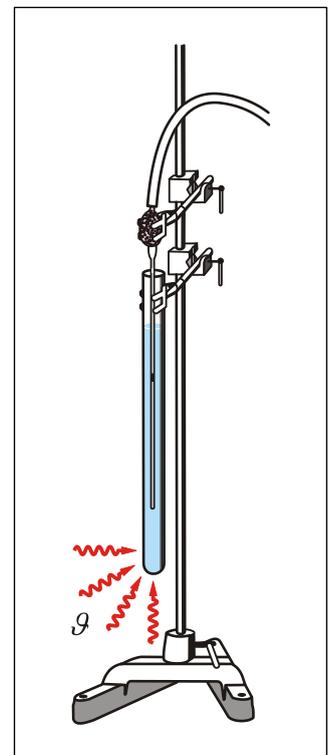


Bild 7.3: Versuchsaufbau

Technische Daten:**Gasthermometer:**

Gesamtlänge: 475 mm

Außendurchmesser der Kapillaren: $(8,00 \pm 0,05)$ mmInnendurchmesser der Kapillaren: $(2,70 \pm 0,05)$ mm**Reagenzglas:**

Länge: 440 mm

Außendurchmesser: $(30,0 \pm 0,1)$ mm**2.3 Versuchsauswertung****Aufgabe 1a:** Nachweis des Hookeschen Gesetzes

- Weisen Sie durch die graphische Bestimmung der Abhängigkeit $\Delta x = f(F)$ den Bereich der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes nach.
- Tragen Sie die Regressionsgerade für den linearen Bereich ein, bestimmen Sie deren Anstieg und schätzen Sie durch Antragen der Fehlerbalken die relative Messunsicherheit ab.

Aufgabe 1b: Nachweis des Boyle-Mariotteschen Gesetzes

- Stellen Sie die Funktion $\log p = f(\log V)$ in einem Diagramm graphisch dar.
- Interpretieren Sie dieses Diagramm und leiten Sie aus dem Anstieg der Geraden die Beziehung zwischen p und V her.
- Führen Sie eine auswertende Diskussion einschließlich einer Grenzwertbetrachtung an Hand der Darstellung $p \cdot V = f(V)$ durch. Bestimmen Sie den Mittelwert sowie die Ober- und Untergrenze und tragen Sie diese mit in das Diagramm mit ein.
- Geben Sie die Messunsicherheit für einen ausgewählten Wert (z.B. $m=100$ g) durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an.

Aufgabe 2: Bestimmung des Volumens als Funktion der Temperatur

- Stellen Sie die Funktion $V = f(\vartheta)$ in einem Diagramm graphisch dar.
- Tragen Sie die Regressionsgerade ein, bestimmen Sie deren Anstieg und schätzen Sie die relative Messunsicherheit durch Antragen der Fehlerbalken ab.
- Ermitteln Sie graphisch in einem gesonderten V - ϑ -Diagramm der Funktion $V = f(\vartheta)$ den absoluten Nullpunkt.
- Ermitteln Sie unter Verwendung des Ergebnisses der Regressionsrechnung den Volumenausdehnungskoeffizienten γ einschließlich der Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung.
- Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Tabellenwert ($\gamma_{Luft} = 3,548 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$).

3. Ergänzung

3.1 Zusätzliche Betrachtungen

zur Aufgabe 2 der Vorbetrachtung

$\vartheta / ^\circ\text{C}$	0	20	35	50	65	80	100
x / mm	172	184	193	202	211	221	233

Wertetabelle

zur Aufgabe 1a: Nachweis des Hookeschen Gesetzes

Für die Bestimmung der Kraft F ergibt sich aus der Versuchsanordnung und der Gleichung (7.2) folgender Zusammenhang:

$$\frac{F}{A_{\text{Kap}}} = \frac{F_{\text{Kolben}}}{A_{\text{Kolben}}} + \frac{F_{\text{Gew}}}{A_{\text{Kolben}}} \quad (7.6)$$

zur Aufgabe 1b: Nachweis des Boyle-Mariotteschen Gesetzes

Der auf der Luftsäule unter dem Quecksilbertropfen wirkende Druck p ergibt sich aus einer Summe verschiedener Drücke. Dazu gehören der Luftdruck p_L , der Schweredruck des Quecksilbertropfens p_{Hg} , der Druck des Kolbens p_{Kolben} sowie der Druck der Auflagegewichte p_{Gew} . So ergibt sich:

$$\Delta p = p_{\text{Hg}} + p_{\text{Kolben}} + p_{\text{Gew}}$$

Δp : relativer Druck auf die Luftsäule unter dem Quecksilbertropfen

- Schweredruck des Quecksilbertropfens

$$p_{\text{Hg}} = \frac{m_{\text{Hg}} \cdot g}{A_{\text{Kap}}} \quad \text{Messgröße: Länge des Quecksilberfadens } h_{\text{Hg}}$$

- Kolbendruck

$$p_{\text{Kolben}} = \frac{m_{\text{Kolben}} \cdot g}{A_{\text{Kolben}}} \quad \text{Messgrößen: } m_{\text{Kolben}}, A_{\text{Kolben}}$$

- Differenzdruck

$$p_{\text{Gew}} = \frac{m_{\text{Gew}} \cdot g}{A_{\text{Kolben}}} \quad m_{\text{Gew}}: \text{Masse der Auflagegewichte}$$

$$p = p_L + \Delta p$$

p : absoluter Druck auf die Luftsäule unter dem Quecksilbertropfen

Das eingeschlossene Gasvolumen V ergibt sich aus Gleichung (7.1):

$$V = A_{\text{Kap}} \cdot x.$$

<h1 style="margin: 0;">W07</h1> <p style="margin: 0;">Physikalisches Praktikum</p>	<h2 style="margin: 0;">Messwertprotokoll</h2> <h3 style="margin: 0;">Gasthermometer</h3>	<p style="font-size: small; margin: 0;">Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg</p>
--	--	---

Aufgabe 1

• Kolbendurchmesser: $d_{Kolb} = \underline{30,8 \text{ mm}}$ (mit Messschieber gemessen)

Abweichung: $u_Z(d_{Kolb}) = \underline{0,1 \text{ mm}}$
 $u_S(d_{Kolb}) = 10^{-4} \cdot 30,8 \text{ mm} = \underline{0,003 \text{ mm}}$

• Kolbenmasse: $m_{Kolb} = \underline{318,8 \text{ g}}$ (Feinwaage, Ablesbarkeit 0,1g)

Abweichung: $u_Z(m_{Kolb}) = \underline{0,1 \text{ g}}$ (systematischer Anteil vernachlässigt)

• Ruhelänge: $x_0 = \underline{305 \text{ mm}}$

Abweichung: $u_Z(x) = u_Z(x_0) = \underline{1 \text{ mm}}$ (systematischer Anteil vernachlässigt)

• Luftdruck: $p_L = \underline{766 \text{ Torr}}$ (1 Torr entspricht 133 Pa)

Abweichung: $u_Z(p_L) = \underline{1 \text{ Torr}}$ (systematischer Anteil vernachlässigt)

• Länge des Hg-Fadens: $h_{Hg} = \underline{12 \text{ mm}}$

Abweichung: $u_Z(h_{Hg}) = \underline{0,5 \text{ mm}}$ (systematischer Anteil vernachlässigt)

Messwerte Aufgabe 1

m/g	x/mm	$\Delta x/mm$
0	295	10
100	291	14
200	287	18
300	284	21
400	281	24
500	277	28
600	274	31
700	271	34
800	267	38
900	265	40
1000	262	43
1100	260	45
1200	257	48
1300	254	51
1400	250	55

Gewichtssatz

m/g	E/mg
1000	160
500	80
200	30
100	16
50	10
20	8
10	6
5	5
2	4
1	3

Fehlerklasse M2

Messwerte Aufgabe 2

$\vartheta/^\circ\text{C}$	x/mm
0	213
100	288
90	283
80	277
70	269
60	262
50	254
40	246
30	236

Mit $\Delta x = x_0 - x$

STEMPEL
24 Okt. 2020
Unterschrift

<h1 style="margin: 0;">W07</h1> <p style="margin: 0;">Physikalisches Praktikum</p>	<h2 style="margin: 0;">Auswertung Gasthermometer</h2>	<p style="font-size: small; margin: 0;">Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg</p>
--	---	---

Aufgabe 1: Bestimmung der Wegänderung des Quecksilbertropfens zur aufgewendeten Kraft

1a) Nachweis des Hookeschen Gesetzes

- Berechnung der Kraft auf den Quecksilbertropfen nach Gleichung (7.5):

$$\frac{F}{A_{Kap}} = \frac{F_{Kolb} + F_{Gew}}{A_{Kolb}}$$

$$F = \frac{A_{Kap}}{A_{Kolb}} \cdot (F_{Kolb} + F_{Gew}) \qquad F_{Kolb} = m_{Kolb} \cdot g \qquad F_{Gew} = m_{Gewb} \cdot g$$

$$F = \frac{A_{Kap}}{A_{Kolb}} \cdot g \cdot (m_{Kolb} + m_{Gew}) = \frac{(2,7 \text{ mm})^2}{(30,8 \text{ mm})^2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (318,8 \text{ g} + 100 \text{ g})$$

– Ergebnis:

$F = (31,57 \pm 0,95) \text{ mN}$

für $m = 100 \text{ g}$

- Darstellung der Ergebnisse aus Tabelle 1 im Diagramm 1.

m/g	$\Delta x/\text{mm}$	$F/10^{-3} \text{ N}$
0	10	24,03
100	14	31,57
200	18	39,11
300	21	46,65
400	24	54,19
500	28	61,73
600	31	69,27
700	34	76,80
800	38	84,34
900	40	91,88
1000	43	99,42
1100	45	106,96
1200	48	114,50
1300	51	122,04
1400	55	129,57

Aus dem Diagramm $\Delta x = f(F)$ lässt sich ein linearer Zusammenhang bis zu einer Kraft von ca. 100 mN erkennen. Damit ist der Nachweis des Hookeschen Gesetzes nach der Gleichung (7.3) mit der Proportionalität von Auslenkung und einwirkender Kraft erbracht.

Die bei weiterer Erhöhung der Kraft F auftretende Nichtlinearität ist auf den nicht vollständig dichten Kraftübertragungsweg über die Luft zum Quecksilbertropfen zurückzuführen.

Die Messabweichungen im linearen Teil der Kurve werden durch in das Diagramm eingetragene Fehlerbalken festgestellt. Festgelegt wurden diese so, dass alle Messwerte mit ihrem Fehlerbalken durch die Trendkurve erfasst werden. Abgeschätzt ergaben Sie folgendes:

$$\frac{u(F)}{F} = 3\% \qquad \frac{u(\Delta x)}{\Delta x} = 3\%$$

Tab.7.1: Berechnungsergebnisse zur Kraft F

- gemessene bzw. abgelesene Werte

– Luftdruck: $p_L = (766 \pm 1) \text{ Torr}$ (1 Torr $\hat{=}$ 133 Pa)
 $p_L = 766 \cdot 133 \text{ Pa} = (101.878 + 133) \text{ Pa}$

– Dichte Quecksilber: $\rho_{Hg} = 13,55 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (Tabellenwert)

- Berechnung des Schweredruckes des Quecksilbertropfens

$$p_{Hg} = \frac{m_{Hg} \cdot g}{A_{Kap}} = \frac{\rho_{Hg} \cdot V_{Hg} \cdot g}{A_{Kap}} = \frac{\rho_{Hg} \cdot \cancel{A_{Kap}} \cdot h_{Hg} \cdot g}{\cancel{A_{Kap}}} = \rho_{Hg} \cdot h_{Hg} \cdot g$$

$$p_{Hg} = 13,55 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{1,595 \text{ kPa}}$$

– relative Abweichungen: $\frac{u(p_{Hg})}{p_{Hg}} = \left| \frac{u(h_{Hg})}{h_{Hg}} \right| = \frac{0,5 \text{ mm}}{12 \text{ mm}} \cdot 100\% = \underline{4,16\%}$

– absolute Abweichung: $u(p_{Hg}) = p_{Hg} \cdot \frac{u(p_{Hg})}{p_{Hg}} = 1,595 \text{ kPa} \cdot 4,16\% = \underline{0,0664 \text{ kPa}}$

– Ergebnis: $p_{Hg} = (1,60 \pm 0,07) \text{ kPa}$

- Berechnung des Kolbendrucks

$$p_{Kolb} = \frac{m_{Kolb} \cdot g}{A_{Kolb}} = \frac{m_{Kolb} \cdot g}{\frac{1}{4}\pi \cdot d_{Kolb}^2} = \frac{0,3188 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}}{\frac{1}{4}\pi \cdot (30,8 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot \text{s}^2} = \underline{4,198 \text{ kPa}}$$

– relative Abweichungen: $\frac{u(p_{Kolb})}{p_{Kolb}} = \left| \frac{u(m_{Kolb})}{m_{Kolb}} \right| + 2 \left| \frac{u(d_{Kolb})}{d_{Kolb}} \right|$
 $= \frac{0,1 \text{ g}}{318,8 \text{ g}} + 2 \cdot \frac{0,10 \text{ mm}}{30,8 \text{ mm}} = 0,031\% + 0,649\% = \underline{0,680\%}$

– absolute Abweichung: $u(p_{Kolb}) = p_{Kolb} \cdot \frac{u(p_{Kolb})}{p_{Kolb}} = 4,198 \text{ kPa} \cdot 0,680\% = \underline{0,0285 \text{ kPa}}$

– Ergebnis: $p_{Kolb} = (4,20 \pm 0,03) \text{ kPa}$

- Berechnung des Druckes durch Auflagegewichte (z.B. 100 g ± 16 mg)

$$p_{Gew} = \frac{m_{Gew} \cdot g}{A_{Kolb}} = \frac{m_{Gew} \cdot g}{\frac{1}{4}\pi \cdot d_{Kolb}^2} = \frac{0,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}}{\frac{1}{4}\pi \cdot (30,8 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot \text{s}^2} = \underline{1,317 \text{ kPa}}$$

– relative Abweichungen: $\frac{u(p_{Gew})}{p_{Gew}} = \left| \frac{u(m_{Gew})}{m_{Gew}} \right| + 2 \left| \frac{u(d_{Kolb})}{d_{Kolb}} \right|$
 $= \frac{0,016 \text{ g}}{100 \text{ g}} + 2 \cdot \frac{0,10 \text{ mm}}{30,8 \text{ mm}} = 0,016\% + 0,649\% = \underline{0,665\%}$

– absolute Abweichung: $u(p_{Gew}) = p_{Gew} \cdot \frac{u(p_{Gew})}{p_{Gew}} = 1,317 \text{ kPa} \cdot 0,665\% = \underline{0,00876 \text{ kPa}}$

– Ergebnis: $p_{Gew} = (1,32 \pm 0,01) \text{ kPa}$

- Berechnung des Gesamtdruckes

$$\Delta p = p_{Hg} + p_{Kolb} + p_{Gew} = (1,595 + 4,198 + 1,317) \text{ kPa} = \underline{7,110 \text{ kPa}}$$

$$u(\Delta p) = u(p_{Hg}) + u(p_{Kolb}) + u(p_{Gew}) = (0,0644 + 0,0285 + 0,0088) \text{ kPa} = \underline{0,1017 \text{ kPa}}$$

– Ergebnis:

$$\Delta p = (7,11 \pm 0,11) \text{ kPa}$$

$$\frac{u(\Delta p)}{\Delta p} = \underline{1,55\%}$$

- Berechnung des absoluten Druckes

$$p_{abs} = p_L + \Delta p = (101,878 + 7,110) \text{ kPa} = \underline{108,988 \text{ kPa}}$$

$$u(p_{abs}) = u(p_L) + u(\Delta p) = (0,1330 + 0,1017) \text{ kPa} = \underline{0,2347 \text{ kPa}}$$

– Ergebnis:

$$p_{abs} = (108,99 \pm 0,24) \text{ kPa}$$

$$\frac{u(p_{abs})}{p_{abs}} = \underline{0,22\%}$$

1b) Nachweis des Boyle-Mariotteschen Gesetzes

- Berechnung der Gesamtwerte (Berechnung mit $V = A_{Kap} \cdot x$)

m/kg	x/mm	V/cm^3	$\log V/\text{m}^3$	$\Delta p/\text{kPa}$	p_{abs}/kPa	$\log p_{abs}/\text{Pa}$	$p \cdot V/\text{Nm}$
0	295	1,69	-5,772	0,00	107,67	5,032	181,86
0,1	291	1,67	-5,778	1,32	108,99	5,037	181,59
0,2	287	1,64	-5,784	2,63	110,30	5,043	181,26
0,3	284	1,63	-5,789	3,95	111,62	5,048	181,50
0,4	281	1,61	-5,793	5,27	112,94	5,053	181,70
0,5	277	1,59	-5,800	6,58	114,25	5,058	181,20
0,6	274	1,57	-5,804	7,90	115,57	5,063	181,31
0,7	271	1,55	-5,809	9,22	116,89	5,068	181,37
0,8	267	1,53	-5,816	10,53	118,20	5,073	180,70
0,9	265	1,52	-5,819	11,85	119,52	5,077	181,35
1,0	262	1,50	-5,824	13,17	120,84	5,082	181,27
1,1	260	1,49	-5,827	14,48	122,15	5,087	181,84
1,2	257	1,47	-5,832	15,80	123,47	5,092	181,68
1,3	254	1,45	-5,837	17,12	124,79	5,096	181,48
1,4	250	1,43	-5,844	18,43	126,10	5,101	180,50
Mittelwert:							181,37

Tab.2: Zusammenstellung der zur Auswertung **Aufgabe 2** und **3** notwendigen Zwischenergebnisse

- Diskussion der Ergebnisse

Der Anstieg b der Funktion $\log p = f(\log V)$ auf der Datenbasis aus **Diagramm 2** beträgt

$$b = \frac{\log p_2 - \log p_1}{\log V_2 - \log V_1} = \frac{5,039 - 5,098}{5,78 - 5,84} = \underline{-0,983}$$

Das Ergebnis von $-0,983$ wird auf -1 gerundet und kann mit der Messunsicherheit erklärt werden.

Daraus folgt: $p \sim V^{-1}$ bzw. $p \cdot V = \text{konst.}$

Damit ist der Nachweis des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes erbracht.

Die maximale Abweichung für $p \cdot V$ wird für den ungünstigsten Messwert $m = 100$ g ermittelt:

– relative Abweichung des Volumens bei $m = 100$ g:

$$\frac{u(V)}{V} = \left| \frac{u(x)}{x} \right| + 2 \left| \frac{u(d_{Kap})}{d_{Kap}} \right| = \frac{1 \text{ mm}}{291 \text{ mm}} + 2 \frac{0,05 \text{ mm}}{2,7 \text{ mm}} = 0,34\% + 3,70\% = \underline{4,05\%}$$

– relative Abweichung: $\frac{u(p \cdot V)}{p \cdot V} = \left| \frac{u(p)}{p} \right| + \left| \frac{u(V)}{V} \right| = 0,22\% + 4,05\% = \underline{4,27\%}$

– absolute Abweichung: $u(p \cdot V) = p \cdot V \cdot \frac{u(p \cdot V)}{p \cdot V} = 181,59 \text{ Nm} \cdot 4,27\% = \underline{7,75 \text{ Nm}}$

– Ergebnis:

$$p \cdot V = (181,59 \pm 7,75) \text{ Nm}$$

Die so ermittelte Messunsicherheit ist größer als die aus dem Anstieg erfassten Abweichungen, dies unterstreicht die Aussage des Nachweises der Konstanz von $p \cdot V$ im Rahmen der Messunsicherheit.

Aufgabe 2: Bestimmung des Volumens als Funktion der Temperatur

n_i	Messwert ϑ °C	ϑ^2 °C ²	Messwert x mm	Messwert V_i cm ³	Regressionswert V_i' cm ³	$(V_i - V_i')^2$ (cm ³) ²
1	0	-	213	1,220	1,227	0,000060
2	100	10000	288	1,649	1,667	0,000336
3	90	8100	283	1,620	1,623	0,000009
4	80	6400	277	1,586	1,579	0,000045
5	70	4900	269	1,540	1,535	0,000024
6	60	3600	262	1,500	1,491	0,000077
7	50	2500	254	1,454	1,447	0,000049
8	40	1600	246	1,408	1,403	0,000027
9	30	900	236	1,351	1,359	0,000065
Summe:	520	38000			Summe:	0,000692

Tab.3: Zwischenrechnungsergebnisse

• Diskussion der Ergebnisse

Der Anstieg b ($y_i = a + b \cdot x_i$) und der Schnittpunkt a mit der y-Achse der Funktion $V = f(\vartheta)$ aus dem **Diagramm4** beträgt

$$b = \frac{V_2 - V_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{(1,62 - 1,27) \text{ cm}^3}{(90 - 10) \text{ K}} = \underline{0,0044 \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}}$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 1,481 \text{ cm}^3 - 0,0044 \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1} \cdot 57,78 \text{ K} = \underline{1,2268 \text{ cm}^3}$$

• Bestimmung des Spannungskoeffizienten γ

$$\gamma = \frac{1}{V_{0^\circ\text{C}}} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta \vartheta} = \frac{b}{a} = \frac{0,0044 \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}}{1,227 \text{ cm}^3} = \underline{3,59 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}}$$

• Bestimmung der Messunsicherheit aus zufälliger und systematischer Abweichung

Die Messunsicherheit des Spannungskoeffizienten γ wird aus zufälliger und systematischer Abweichung unter Verwendung der Gleichungen nach **Abschnitt4.3** berechnet.

Zunächst werden die Standardabweichungen für a und b unter Verwendung der Standardabweichung für V berechnet.

• Zufällige Abweichung $u_Z(\gamma)$ des Spannungskoeffizienten

- Bestimmung der Standardabweichung für V

$$s_V = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (V_i - V_i')^2} = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 0,000692 \text{ (cm}^3\text{)}^2} = \underline{9,93 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3}$$

- Bestimmung der Standardabweichung s_b für den Anstieg b

$$s_b = s_V \cdot \sqrt{\frac{n}{n \cdot \sum \vartheta^2 - (\sum \vartheta)^2}} = 9,93 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \sqrt{\frac{9}{9 \cdot 38000 \text{ K}^2 - (520 \text{ K})^2}} = \underline{0,11 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}}$$

- Bestimmung der zufälligen Abweichung $u_Z(b)$ für den Anstieg b

$$u_Z(b) = \pm t \cdot \frac{s_b}{\sqrt{n}} = \pm 2,45 \cdot \frac{0,11 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}}{\sqrt{9}} = \underline{0,091 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}}$$

($t = 2,45$ bei $n = 9$ und $S = 95\%$ nach **Tab.4.4**)

- Bestimmung der Standardabweichung für Anfangswert V_0

$$s_{V_0} = s_b \cdot \sqrt{\sum \vartheta^2} = 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1} \cdot \sqrt{4750 \text{ K}^2} = \underline{7,67 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3}$$

- Bestimmung der zufälligen Abweichung von V_0

$$u_Z(V_0) = \pm t \cdot \frac{s_{V_0}}{\sqrt{n}} = \pm 2,45 \cdot \frac{7,67 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}}{\sqrt{9}} = \underline{6,27 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3}$$

- Bestimmung der zufälligen Abweichung von γ

– relative Abweichung:
$$\frac{u_Z(\gamma)}{\gamma} = \left| \frac{u_Z(b)}{b} \right| + \left| \frac{u_Z(V_0)}{V_0} \right| = \frac{0,091 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}}{4,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}} + \frac{0,006 \text{ cm}^3}{1,23 \text{ cm}^3}$$

$$= 2,07\% + 0,49\% = \underline{2,58\%}$$

– absolute Abweichung:
$$u_Z(\gamma) = \gamma \cdot \frac{u_Z(\gamma)}{\gamma} = 3,59 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 2,58\% = \underline{0,09 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}}$$

• Systematische Abweichung $u_S(\gamma)$ des Spannungskoeffizienten γ

- Bestimmung für V

$$\frac{u_S(V)}{V} = 2 \left| \frac{u_S(d_{Kap})}{d_{Kap}} \right| + \left| \frac{u_S(x)}{x} \right| \quad (\text{Verwendung des mittleren Messwertes bei } 60^\circ\text{C})$$

$$= 2 \cdot \frac{0,05 \text{ mm}}{2,7 \text{ mm}} + \frac{1 \text{ mm}}{262 \text{ mm}} = 3,70\% + 0,38\% = \underline{4,08\%}$$

– Bestimmung für b

$$\vartheta_{60^{\circ}\text{C}} = 60^{\circ}\text{C} \quad u_S(\vartheta_{60^{\circ}\text{C}}) = \pm 0,2\text{K} \quad \frac{u_S(\vartheta)}{\vartheta_{60^{\circ}\text{C}}} = \frac{u_S(\Delta\vartheta)}{\Delta\vartheta} = 0,33\%$$

$$V_{60^{\circ}\text{C}} = 1,500\text{cm}^3 \quad u_S(V_{60^{\circ}\text{C}}) = \pm 0,061\text{cm}^3 \quad \frac{u_S(V)}{V_{60^{\circ}\text{C}}} = \frac{u_S(\Delta V)}{\Delta V} = 4,08\%$$

$$\frac{u_S(b)}{b} = \left| \frac{u_S(\Delta\vartheta)}{\Delta\vartheta} \right| + \left| \frac{u_S(\Delta V)}{\Delta V} \right| = 0,33\% + 4,08\% = \underline{4,41\%}$$

– Bestimmung für V_0

$$b = (0,0044 \pm 0,0002) \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1} \quad \frac{u_S(b)}{b} = 4,41\%$$

$$b \cdot \vartheta_{60^{\circ}\text{C}} = (0,264 \pm 0,013) \text{ cm}^3 \quad \frac{u_S(b \cdot \vartheta_{60^{\circ}\text{C}})}{b \cdot \vartheta_{60^{\circ}\text{C}}} = 4,41\% + 0,33\% = 4,74\%$$

$$u_S(V_0) = u_S(V_{60}) + u_S(b \cdot \vartheta_{60}) = 0,061\text{cm}^3 + 0,013 \text{ cm}^3 = \underline{0,074 \text{ cm}^3} \quad \frac{u_S(V_0)}{V_0} = \underline{6,03\%}$$

– Bestimmung der systematischen Abweichung für γ

– relative Abweichung:
$$\frac{u_S(\gamma)}{\gamma} = \frac{u_S(b)}{b} + \frac{u_S(V_0)}{V_0} = 4,41\% + 6,03\% = \underline{10,44\%}$$

– absolute Abweichung:
$$u_S(\gamma) = \gamma \cdot \frac{u_S(\gamma)}{\gamma} = 3,59 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 10,44\% = \underline{0,37 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}}$$

• Bestimmung der Gesamtabweichung für γ

$$u(\gamma) = u_Z(\gamma) + u_S(\gamma) = 0,09 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} + 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} = \underline{0,46 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}}$$

Ergebnis:

$$\gamma = (3,59 \pm 0,46) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$\frac{u(\gamma)}{\gamma} = 12,8\%$$

• Diskussion der Ergebnisse

Der Tabellenwert des Spannungskoeffizienten γ von Luft ist $\gamma = 3,67 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Der experimentell ermittelte Wert ergab $\gamma = 3,59 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Die sich daraus ergebende Differenz $\Delta\gamma = 0,08 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ und liegt somit innerhalb der bestimmten Fehlergrenzen.

Nach **Diagramm 5** der Funktion $V = f(\vartheta)$ lautet die Funktionsgleichung

$$V = 0,0044 \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1} \cdot \vartheta + 1,227 \text{ cm}^3$$

Bei $V = 0$ ist $0 = 0,0044 \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1} \cdot \vartheta + 1,227 \text{ cm}^3$

$$\vartheta = \frac{-1,227 \text{ cm}^3}{0,0044 \text{ cm}^3 \cdot \text{K}^{-1}} = \underline{-278,9^{\circ}\text{C}}$$

Der Schnittpunkt mit der x -Achse ($V = 0$) ist $\vartheta = -278,9^{\circ}\text{C}$. Der relative Fehler ist ebenfalls 12,8%. Somit ist der Wert $\vartheta = (-278,9 \pm 35,7)^{\circ}\text{C}$. Die Differenz zum Tabellenwert ($\vartheta_0 = -273,15^{\circ}\text{C}$) beträgt $\Delta\vartheta = 5,8 \text{ K}$ und liegt innerhalb der Fehlergrenzen.

Abhängigkeit der einwirkenden Kraft auf den Quecksilberfaden

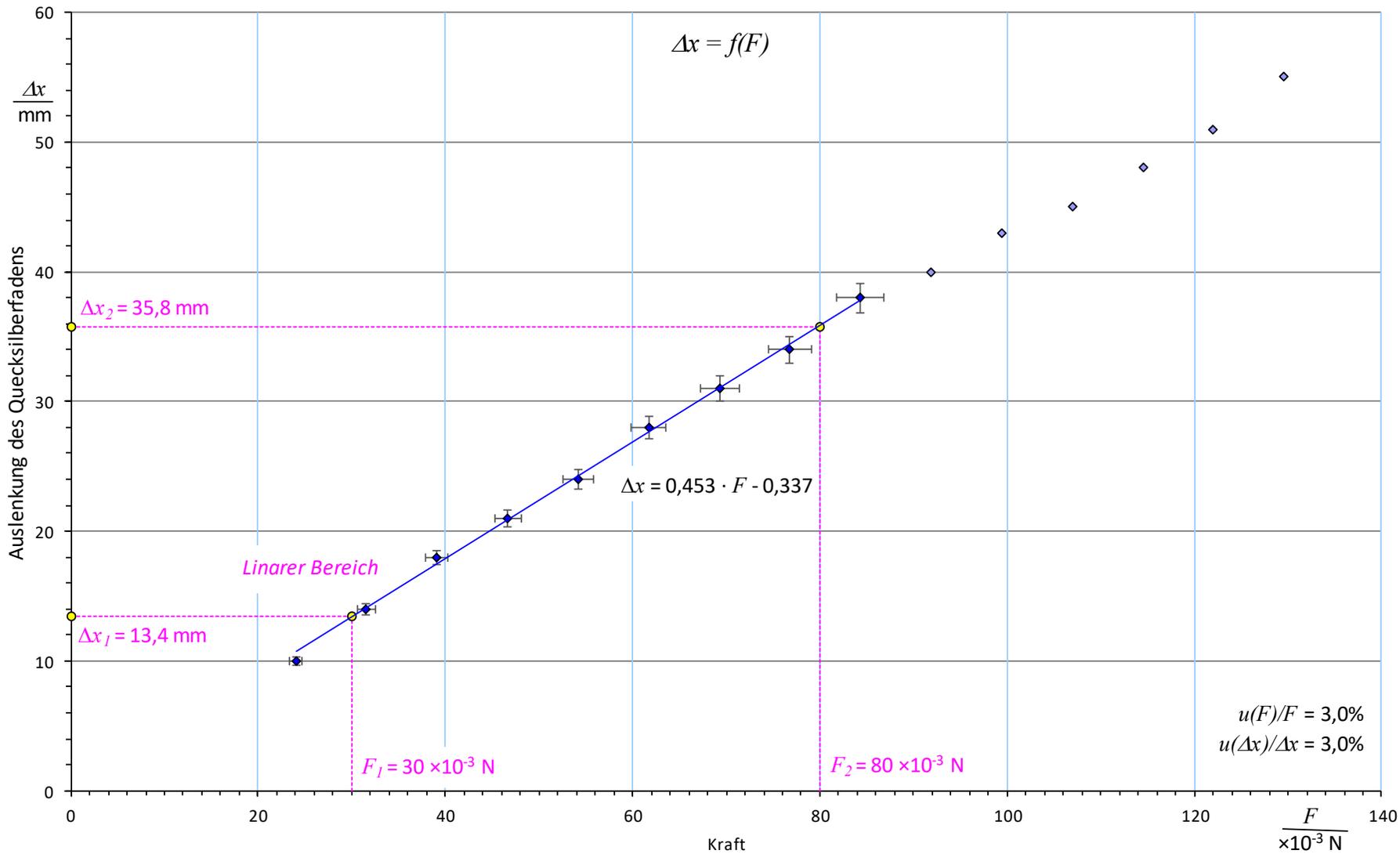
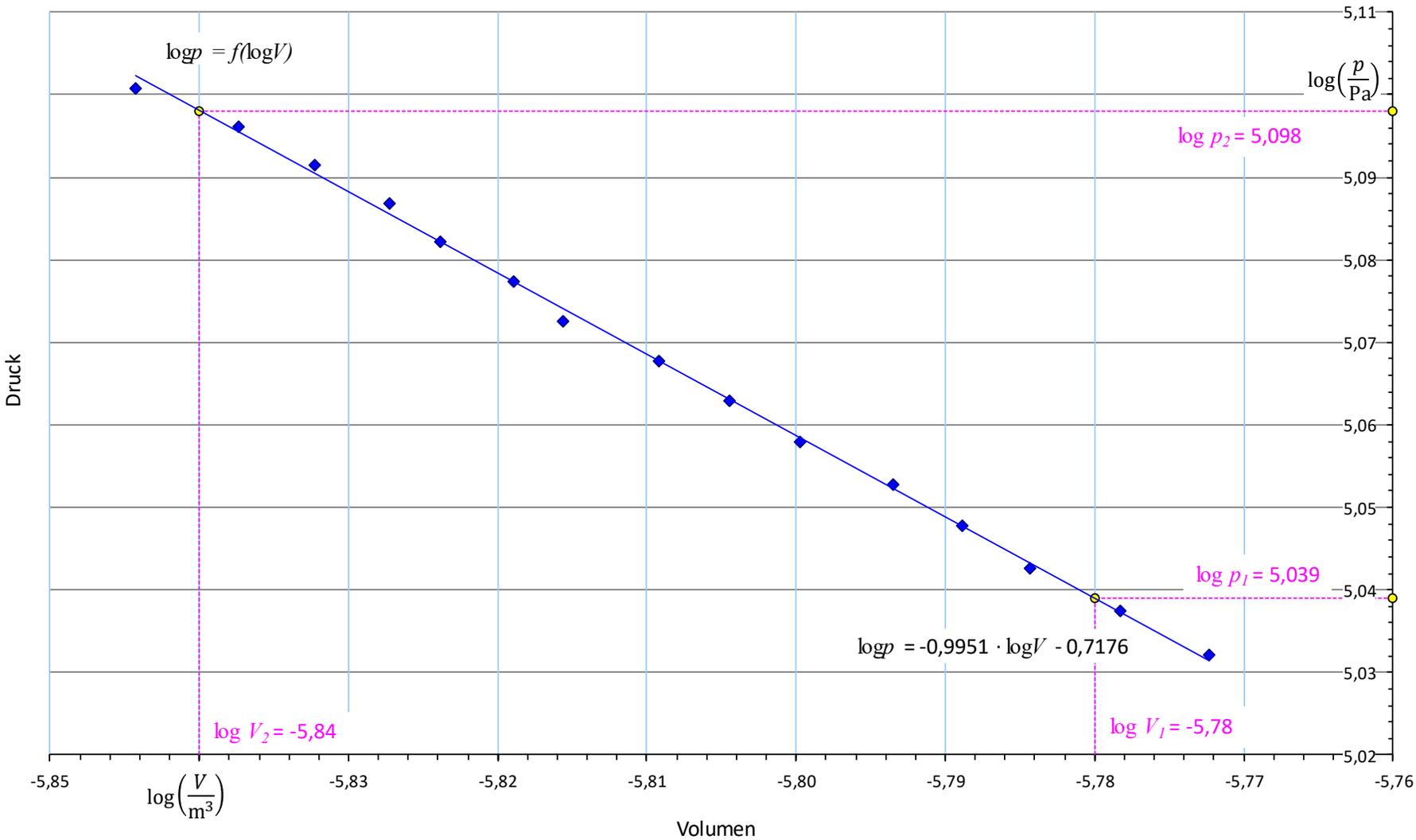


Diagramm 1: Aufgabe 1a

Logarithmus des Drucks als Funktion des Logarithmus des Volumens des Gasthermometers



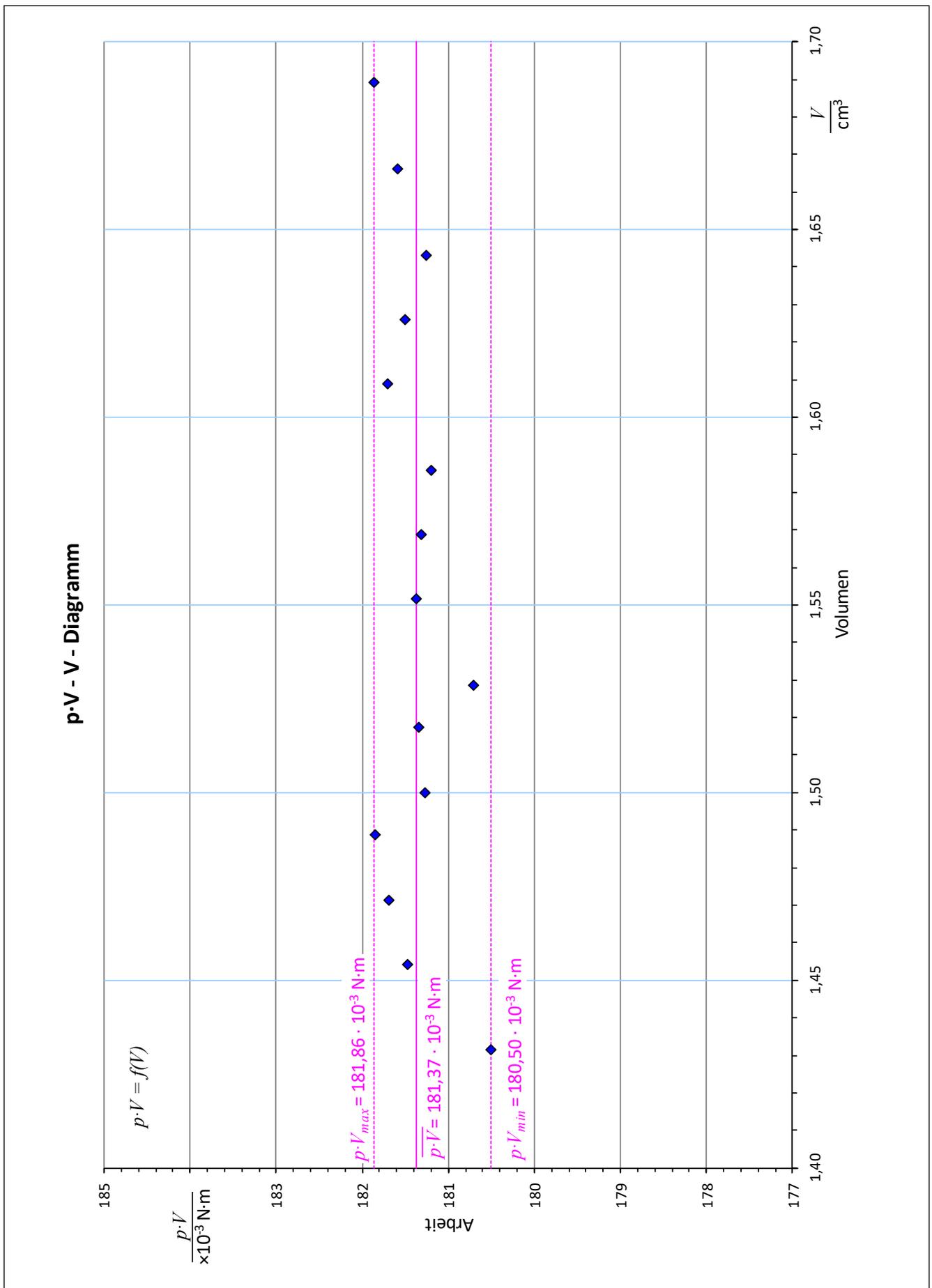


Diagramm 3: Aufgabe 1b

Abhängigkeit von Volumen und Temperatur

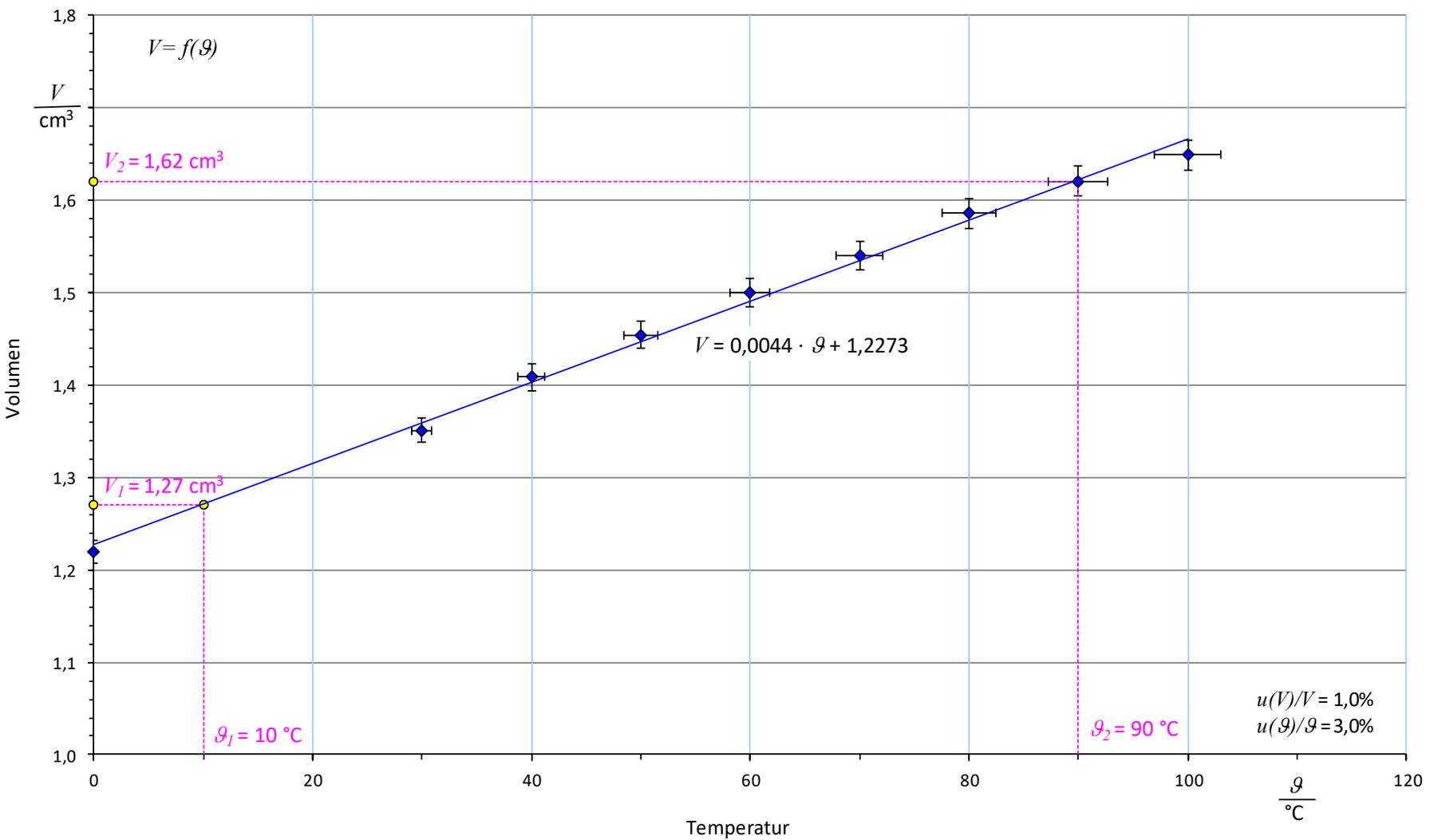


Diagramm 4: Aufgabe 2

Darstellung der Abhängigkeit von Volumen und Temperatur

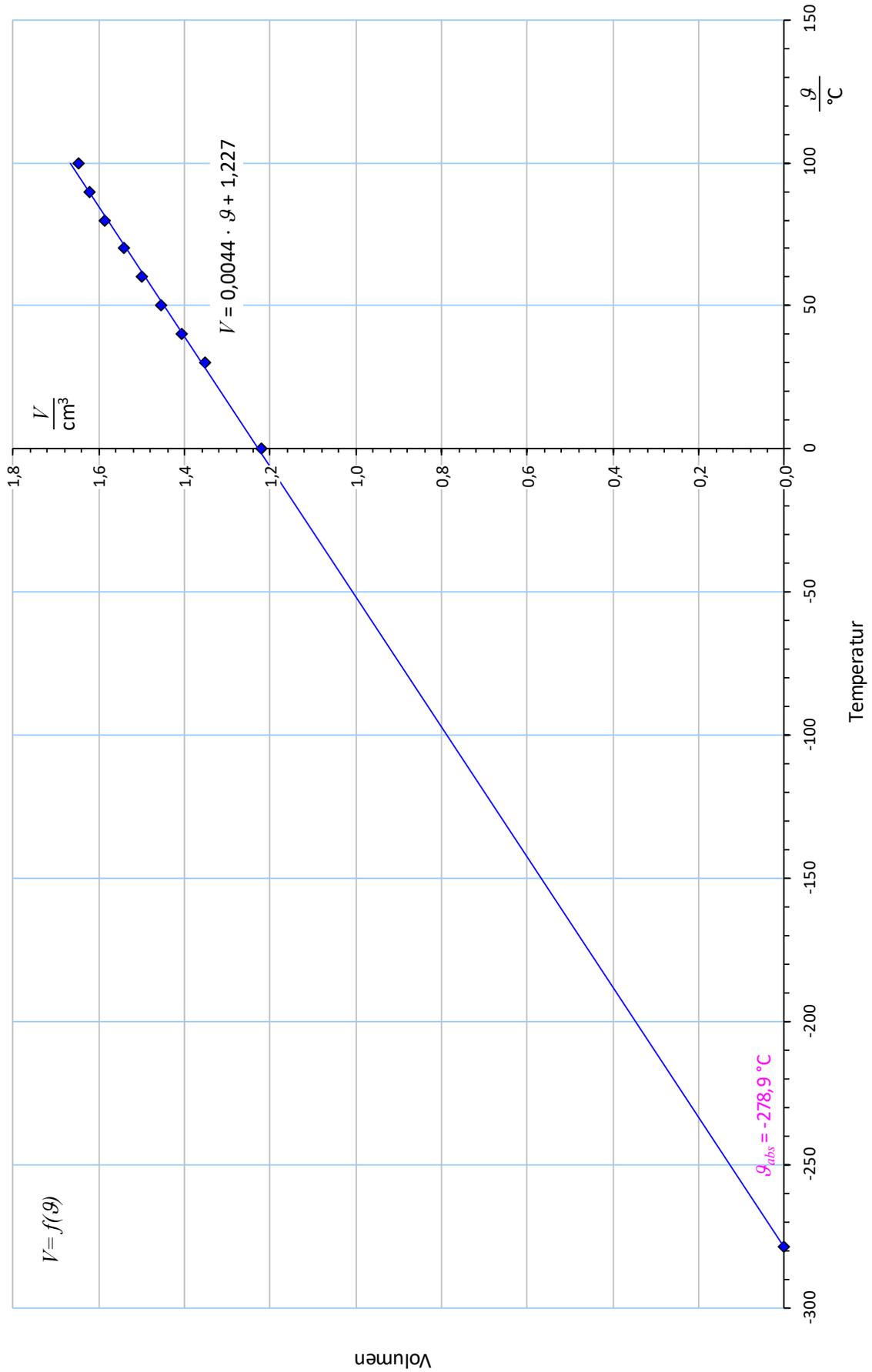


Diagramm 5: Aufgabe 2

8. Literaturhinweise

Alle Literaturhinweise beziehen sich nur auf spezielle Literatur zum Physikalischen Praktikum. Allgemeine Physiklehrbücher sind nicht erfasst. Dafür sollten die Empfehlungen des jeweiligen Dozenten genutzt werden.

Walcher, W.	Praktikum der Physik Teubner Verlag (Teubner Studienbücher)
Geschke, D. (Hrsg.)	Physikalisches Praktikum Teubner Verlag Leipzig
Eichler, H.J.; Kronfeldt, H.D., Sahn, J.	Das Neue Physikalische Praktikum Springer
Becker, J.; Jodl, H.-J.	Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure VDI – Verlag
Taylor, J.R.	Fehleranalyse VCH Verlagsgesellschaft
Adunka, F.	Messunsicherheiten Theorie und Praxis Vulkan – Verlag
Gränicher, H.	Messung beendet – was nun? Vdf / Teubner
Squires, G.L.	Messergebnisse und ihre Auswertung De Gruyter Verlag
Kunze, H.-J.	Physikalische Messmethoden Teubner Verlag (Teubner Studienbücher)
DIN 1319 T1 – T4	Grundbegriffe der Messtechnik
DIN 461	Graphische Darstellung in Koordinatensystemen

